Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 7

a) Es sei $u \in C^2([0,1])$ eine Lösung des homogenen Problems, d.h. u löst

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = 0, \ -\alpha_0 u'(0) + \gamma_0 u(0) = \alpha_1 u'(1) + \gamma_1 u(1) = 0.$$

Multiplizieren der Differentialgleichung mit $u(x)$ und integrieren über $[0,1]$ liefert

$$- \int_0^1 (p(x)u'(x))'u(x)\,dx + \int_0^1 q(x)u^2(x)\,dx = 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\left[-p(x)u'(x)u(x)\right]_0^1}_{=-p(1)u'(1)u(1)+p(0)u'(0)u(0)=:A} + \int_0^1 p(x)\left(u'(x)\right)^2\,dx + \int_0^1 q(x)u^2(x)\,dx = 0 \qquad (1)$$

wobei

$$A = \begin{cases} p(0)\frac{\gamma_0}{\alpha_0}(u(0))^2 + p(1)\frac{\gamma_1}{\alpha_1}(u(1))^2, & \text{falls } \alpha_0 \neq 0, \ \alpha_1 \neq 0 \\ p(1)\frac{\gamma_1}{\alpha_1}(u(1))^2, & \text{falls } \alpha_0 = 0, \ \alpha_1 \neq 0 \\ p(0)\frac{\gamma_0}{\alpha_0}(u(0))^2, & \text{falls } \alpha_0 \neq 0, \ \alpha_1 = 0 \\ 0, & \text{falls } \alpha_0 = \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Insbesondere gilt mit den Voraussetzungen an α_i, γ_i $(i = 1,2)$ sowie p: $A \geq 0$. Wegen $p > 0$ und $q \geq 0$ in $[0,1]$ folgt damit aus (1):

$$A = 0 \quad \text{sowie} \quad q(x)u^2(x) = u'(x) = 0 \quad (x \in [0,1]) \qquad (2)$$

d.h. u ist konstant in $[0,1]$.

Fall 1: Es ex. ein $x_0 \in [0,1]$ mit $q(x_0) \neq 0$. Mit (2) folgt $u(x_0) = 0$ und somit $u \equiv 0$.

Fall 2: $q(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Nach Voraussetzung gilt in diesem Fall $\gamma_0 > 0$ oder $\gamma_1 > 0$. Wegen $A = 0$ folgt dann $u(0) = 0$ oder $u(1) = 0$, also wieder $u \equiv 0$.

In jedem Fall besitzt das homogene Problem nur die triviale Lösung und nach dem Alternativsatz 2.1 folgt die eindeutige Lösbarkeit des inhomogenen Problems für alle $r \in C([0,1])$ und $\rho_0, \rho_1 \in \mathbb{R}$.

b) Sei $q \equiv 0$ und $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$. In diesem Fall ist jede Konstante eine Lösung des homogenen Problems. Das inhomogene Problem hat nun die Form

$$-(p(x)u'(x))' = r(x), \quad -\alpha_0 u'(0) = \rho_0, \ \alpha_1 u'(1) = \rho_1$$

Integrieren der Differentialgleichung liefert die allgemeine Lösung:

$$u(x) = -\int_0^x \frac{1}{p(t)} \left(\int_0^t r(s)\,ds + c_1 \right) dt + c_2.$$

Einsetzen der Randbedingungen:

$$\begin{aligned} u'(0) &= -\frac{1}{p(0)}c_1 \stackrel{!}{=} -\frac{\rho_0}{\alpha_0} \Rightarrow c_1 = \frac{\rho_0}{\alpha_0}p(0) \\ u'(1) &= -\frac{1}{p(1)}\left(\int_0^1 r(s)\,ds + \frac{\rho_0}{\alpha_0}p(0)\right) \stackrel{!}{=} \frac{\rho_1}{\alpha_1} \\ \Rightarrow \int_0^1 r(s)\,ds &\stackrel{!}{=} -\left(\frac{\rho_1}{\alpha_1}p(1) + \frac{\rho_0}{\alpha_0}p(0)p(1)\right) \end{aligned}$$

Dies ist eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des Randwertproblems. Ist die Bedingung erfüllt, so ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$u(x) = -\int_0^x \frac{1}{p(t)}\left(\int_0^t r(s)\,ds + \frac{\rho_0}{\alpha_0}p(0)\right)dt + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist die Lösung nicht eindeutig.

Aufgabe 8

Integrieren der Differentialgleichung liefert

$$-u'(t) = \int_0^t r(s)\,ds + c_0 \quad \text{und} \quad -u(x) = \int_0^x \int_0^t r(s)\,ds\,dt + c_0 x + c_1$$

mit $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Wir integrieren $\int_0^x \int_0^t r(s)\,ds \cdot 1\,dt$ partiell und erhalten:

$$-u(x) = \int_0^x (x-t)r(t)\,dt + c_0 x + c_1.$$

Einsetzen der Randbedingung $u(0) = 0$ ergibt $c_1 = 0$ und aus $u(1) = 0$ folgt

$$c_0 = -\int_0^1 (1-t)r(t)\,dt.$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x (t-x)r(t)\,dt + x\int_0^1 (1-t)r(t)\,dt \\ &= \int_0^x \underbrace{(t-x+x-tx)}_{t(1-x)}r(t)\,dt + \int_x^1 x(1-t)r(t)\,dt \\ &= \int_0^1 G(x,t)r(t)\,dt \end{aligned}$$

wobei

$$G(x,t) = \begin{cases} t(1-x), & 0 \le t \le x \le 1 \\ x(1-t), & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

Für die Ableitung gilt:

$$u'(x) = -\int_0^x r(t)\,dt + \int_0^1 (1-t)r(t)\,dt = \int_0^x -tr(t)\,dt + \int_x^1 (1-t)r(t)\,dt = \int_0^1 H(x,t)r(t)\,dt$$

mit

$$H(x,t) = \begin{cases} -t, & 0 \le t \le x \le 1 \\ 1-t, & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

Wir erhalten:

$$\|u\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |u(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 G(x,t)r(t)\,dt \right| \le \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |G(x,t)|\,dt \;\cdot\; \|r\|_\infty$$

$$\int_0^1 |G(x,t)|\,dt = \int_0^x t(1-x)\,dt + \int_x^1 x(1-t)\,dt = (1-x)\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x}{2}(1-x)^2 = (1-x)\tfrac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |G(x,t)|\,dt = \max_{x\in[0,1]} (1-x)\tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{8}$$

und analog

$$\|u'\|_\infty \le \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |H(x,t)|\,dt \;\cdot\; \|r\|_\infty = \|r\|_\infty \max_{x\in[0,1]} (x^2 - x + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\|r\|_\infty.$$

Aufgabe 9

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$p(\mu) = \mu^3 - 4\mu^2 + 5\mu - 2.$$

Die Nullstelle $\mu_1 = 1$ kann man leicht erraten. Polynomdivision führt anschließend auf

$$p(\mu) = (\mu-1)(\mu^2 - 3\mu + 2) = (\mu-1)(\mu-1)(\mu-2).$$

Die allg. Lösung der Differentialgleichung ist somit gegeben durch

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x}$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Für die Ableitungen erhalten wir

$$u'(x) = c_1 e^x + c_2(e^x + xe^x) + 2c_3 e^{2x}, \quad u''(x) = c_1 e^x + c_2(2e^x + xe^x) + 4c_3 e^{2x}.$$

Einsetzen der Randbedingungen führt auf die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda u(0) - u'(0) = \alpha &\iff (\lambda-1)c_1 - c_2 + (\lambda-2)c_3 = \alpha \\ u'(0) - u''(0) = \beta &\iff -c_2 - 2c_3 = \beta \\ u(1) - u'(1) = \gamma &\iff -c_2 e - c_3 e^2 = \gamma \end{aligned}$$

Diese sind äquivalent zum LGS

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & \lambda-2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -e & -e^2 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Wegen $\det A = (\lambda-1)(e^2 - 2e)$ besitzt das LGS eine eindeutige Lösung, falls $\lambda \ne 1$. In diesem Fall besitzt auch das gegebene Randwertproblem eine eindeutige Lösung.
Im Fall $\lambda = 1$ formen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix um:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \alpha \\ 0 & -1 & -2 & \beta \\ 0 & -e & -e^2 & \gamma \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & -1 & \beta-\alpha \\ 0 & 1 & e & -\frac{\gamma}{e} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \beta - 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha - \beta \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\gamma}{e} + e(\beta-\alpha) \end{pmatrix}$$

Wir können nun ablesen, dass das LGS eine Lösung besitzt, falls $\beta - 2\alpha = -\frac{\gamma}{e} + e(\beta - \alpha)$ gilt.
Bemerkung: Im Fall $\lambda \neq 1$ besitzt das homogene Problem nur die triviale Lösung und nach dem Alternativsatz ist das inhomogene Problem eindeutig lösbar (das haben wir in der Rechnung auch gesehen). Ist $\lambda = 1$, so ist jede Funktion der Form $u(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$ Lösung des homogenen Problems. Der Alternativsatz sagt in diesem Fall, dass eine Lösung nicht für jede rechte Seite existiert (Rechnung: Beziehung zwischen α, β, γ muss erfüllt sein). Existiert eine Lösung, so ist sie nicht eindeutig (addiere Lösung des homogenen Problems hinzu).