Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
4. Übungsblatt

Aufgabe 10

Es sei
$$L[u](x) = a_2(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x), \quad (x \in [a, b])$$
wobei $a_i \in C([a, b]),\ (i = 0, 1, 2),\ a_2(x) \neq 0,\ (x \in [a, b])$. Weiter sei
$$U_1[u] = -\alpha_0 u'(a) + \gamma_0 u(a), \quad U_2[u] = \alpha_1 u'(b) + \gamma_1 u(b)$$
mit $\alpha_0^2 + \gamma_0^2 > 0,\ \alpha_1^2 + \gamma_1^2 > 0$.
Das homogene Problem besitze nur die triviale Lösung, und es sei (φ, ψ) ein Fundamentalsystem von $L[u] = 0$, das die Randbedingungen $U_1[\varphi] = 0,\ U_2[\varphi] = 1,\ U_1[\psi] = 1,\ U_2[\psi] = 0$ erfüllt. Mit $W(x) = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix}$ werde (wie in der Vorlesung) die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems (φ, ψ) bezeichnet.
Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion für das gegebene Randwertproblem gegeben ist durch
$$G(x, t) = \frac{1}{a_2(t)W(t)} \cdot \begin{cases} \varphi(x)\psi(t), & a \leq x \leq t \leq b \\ \varphi(t)\psi(x), & a \leq t \leq x \leq b. \end{cases}$$

Aufgabe 11

Berechnen Sie jeweils die Greensche Funktion für die folgenden Randwertprobleme:

a) $L[u] = u^{(4)},\ u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0,$

b) $L[u] = -u'' + c^2 u,\ u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1) \quad (c \neq 0).$

Aufgabe 12

Gegeben sei das nichtlineare Randwertproblem
$$-u''(x) = f(x, u(x)) \quad (0 < x < 1),\ u(0) = u(1) = 0,$$
wobei $f \in C([0, 1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei, und es existiere ein $L < 8$ mit
$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \quad \text{für alle } (x, y), (x, \tilde{y}) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie, dass das Randwertproblem eine eindeutige Lösung besitzt.
Hinweis: Greensche Funktion, Banachscher Fixpuntksatz

Besprechung in der Übung am 15.5.2013