Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 10

Da das homogene Problem nur die triviale Lösung besitzt, folgt mit Satz II.2, dass die Greensche Funktion existiert und durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:

$$G(x,t) = \begin{cases} G_1(x,t) & (x,t) \in \Delta_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le t \le b\} \\ G_2(x,t) & (x,t) \in \Delta_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le t \le x \le b\} \end{cases}$$

1) $G, \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ stetig auf $\mathring{\Delta}_1, \mathring{\Delta}_2$

2) $G \in C([a,b]^2)$

3) $\frac{\partial G}{\partial x}(x, x-0) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, x+0) = \frac{1}{a_2(x)}$ für alle $x \in (a,b)$

4) $G(\cdot, t)$ erfüllt für $a \le x < t \le b$ und $a \le t < x \le b$ die Differentialgleichung $L[G(\cdot,t)] = 0$

5) $U_i[G(\cdot,t)] = 0$ $(i = 1,2, \ a < t < b)$.

Es bleibt nun zu zeigen, dass die Funktion

$$h(x,t) = \begin{cases} h_1(x,t) := \frac{\varphi(x)\psi(t)}{a_2(t)W(t)}, & a \le x \le t \le b \\ h_2(x,t) := \frac{\varphi(t)\psi(x)}{a_2(t)W(t)}, & a \le t \le x \le b \end{cases}$$

die Eigenschaften 1) - 5) besitzt.
Bemerkung: Da (φ, ψ) Fundamentalsystem, folgt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$.
Beweis: Sei $x_0 \in [a,b]$ mit $W(x_0) = 0$. Dann ex. $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_0) & \psi(x_0) \\ \varphi'(x_0) & \psi'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definiere $g(x) = c_1\varphi(x) + c_2\psi(x)$. Dann gilt $L[g] = 0$ sowie $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) = 0$. Nach Picard-Lindelöf besitzt das Problem $L[u] = 0, \ u(x_0) = 0, \ u'(x_0) = 0$ nur die triviale Lösung, es folgt also $g \equiv 0$ und somit $c_1 = c_2 = 0$ $\lightning$.

1) Da $\varphi, \psi, \varphi', \varphi'', \psi', \psi'' \in C([a,b])$ und $a_2(t), W(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$, folgt $h_1, \frac{\partial h_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \in C(\mathring{\Delta}_1)$ sowie $h_2, \frac{\partial h_2}{\partial x}, \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} \in C(\mathring{\Delta}_2)$.

2) Wegen 1) bleibt nur zu zeigen: h stetig in (t,t) für alle $t \in [a,b]$. Erfüllt, da $\lim\limits_{\mu \to 0} h_1(t + \mu_1, t + \mu_2) = \frac{\varphi(t)\psi(t)}{a_2(t)W(t)} = h(t,t) = \lim\limits_{\mu \to 0} h_2(t + \mu_1, t + \mu_2)$.

3) Es gilt: $\frac{\partial h}{\partial x}(x, x-0) = \frac{\varphi(x)\psi'(x)}{a_2(x)W(x)}$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x, x+0) = \frac{\varphi'(x)\psi(x)}{a_2(x)W(x)}$.
$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(x, x-0) - \frac{\partial h}{\partial x}(x, x+0) = \frac{1}{a_2(x)} \underbrace{\frac{\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x)}{W(x)}}_{=1}$.

4) Für $a \leq x < t \leq b$ gilt

$$L[h(\cdot, t)] = L[h_1(\cdot, t)] = \frac{\psi(t)}{a_2(t)W(t)} L[\varphi] = 0,$$

da φ Lösung des homogenen Problems. Analoges gilt für $a \leq t < x \leq b$, da $L[\psi] = 0$.

5) Es gilt:

$$\begin{aligned} U_1[h(\cdot, t)] &= -\alpha_0 \frac{\partial h_1}{\partial x}(a, t) + \gamma_0 h_1(a, t) = -\alpha_0 \frac{\psi(t)}{a_2(t)W(t)} \varphi'(a) + \gamma_0 \frac{\psi(t)}{a_2(t)W(t)} \varphi(a) \\ &= \frac{\psi(t)}{a_2(t)W(t)} U_1[\varphi] = 0 \end{aligned}$$

Analog folgt $U_2[h(\cdot, t)] = \frac{\varphi(t)}{a_2(t)\psi(t)} U_2[\psi] = 0$.

Bemerkung: Die Voraussetzung $U_2[\varphi] = U_1[\psi] = 1$ wurde für den Nachweis, dass G Greensche Funktion ist, nicht benutzt. Sie ist aber notwendig um zu gewährleisten, dass das homogene Problem nur die triviale Lösung besitzt (es muss $\begin{vmatrix} U_1[\varphi] & U_1[\psi] \\ U_2[\varphi] & U_2[\psi] \end{vmatrix} \neq 0$ gelten).

Aufgabe 11

a) $L[u] = u^{(4)}$, $U_1[u] := u(0)$, $U_2[u] := u(1)$, $U_3[u] := u'(0)$, $U_4[u] := u'(1)$.
Ein Fundamentalsystem ist offenbar gegeben durch

$$\varphi_1(x) = 1, \ \varphi_2(x) = x, \ \varphi_3(x) = x^2, \ \varphi_4(x) = x^3.$$

Da das homogene Problem nur die triviale Lösung besitzt, existiert die Greensche Funktion und ist eindeutig bestimmt (Satz II.2). Wir verwenden (wie in der Vorlesung) den Ansatz

$$G(x,t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^4 (\alpha_i(t) + \beta_i(t))\varphi_i(x), & 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ \sum_{i=1}^4 (\alpha_i(t) - \beta_i(t))\varphi_i(x), & 0 \leq t < x \leq 1 \end{cases}$$

Die Eigenschaften 2) und 3) führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \varphi_3(t) & \varphi_4(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \varphi_3'(t) & \varphi_4'(t) \\ \varphi_1''(t) & \varphi_2''(t) & \varphi_3''(t) & \varphi_4''(t) \\ \varphi_1'''(t) & \varphi_2'''(t) & \varphi_3'''(t) & \varphi_4'''(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \\ \beta_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2a_4(t)} \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \\ \beta_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und die Lösung ist

$$\beta_1(t) = \frac{t^3}{12}, \quad \beta_2(t) = -\frac{t^2}{2}, \quad \beta_3(t) = \frac{t}{4}, \quad \beta_4(t) = -\frac{1}{12}.$$

Wir verwenden noch Eigenschaft 5) (Randbedingungen), um $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_4(t)$ zu bestimmen. Es muss gelten:

$$\begin{aligned}
U_1[G(\cdot,t)] = 0 &\iff \sum_{i=1}^{4} (\alpha_i(t) + \beta_i(t))\varphi_i(0) = 0 \iff \alpha_1(t) + \beta_1(t) = 0 \\
U_2[G(\cdot,t)] = 0 &\iff \sum_{i=1}^{4} (\alpha_i(t) - \beta_i(t))\varphi_i(1) = 0 \iff \sum_{i=1}^{4} (\alpha_i(t) - \beta_i(t)) = 0 \\
U_3[G(\cdot,t)] = 0 &\iff \sum_{i=1}^{4} (\alpha_i(t) + \beta_i(t))\varphi_i'(0) = 0 \iff \alpha_2(t) + \beta_2(t) = 0 \\
U_4[G(\cdot,t)] = 0 &\iff \sum_{i=1}^{4} (\alpha_i(t) - \beta_i(t))\varphi_i'(1) = 0 \iff \sum_{i=2}^{4} (\alpha_i(t) - \beta_i(t))(i-1) = 0
\end{aligned}$$

In Matrix-Vektor Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \\ \alpha_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \\ \beta_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$\alpha_1(t) = -\frac{t^3}{3}, \quad \alpha_2(t) = \frac{t^2}{2}, \quad \alpha_3(t) = 2t^3 - 2t^2 + \frac{t}{4}, \quad \alpha_4 = -\frac{4}{3}t^3 + t^2 - \frac{1}{12}.$$

Alternative Lösungsmöglichkeit:

Betrachte das inhomogene Problem und integriere:

$$\begin{aligned}
u^{(4)}(t) &= r(t) \\
u^{(3)}(s) &= \int_0^s r(t)\,dt + c_0 \\
u''(y) &= \int_0^y \int_0^s r(t)\,dt\,ds + c_0 y + c_1 \\
u'(z) &= \int_0^z \int_0^y \int_0^s r(t)\,dt\,ds\,dy + \tfrac{1}{2}c_0 z^2 + c_1 z + c_2 \quad u'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \\
u(x) &= \int_0^x \int_0^z \int_0^y \int_0^s r(t)\,dt\,ds\,dy\,dz + \tfrac{c_0}{6}x^3 + \tfrac{c_1}{2}x^2 + c_3 \qquad u(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0
\end{aligned}$$

Partielle Integration liefert:

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \int_0^z \int_0^y \int_0^s r(t)\,dt\,ds\,dy\,dz &= \int_0^x 1 \left(\int_0^z \int_0^y \int_0^s r(t)\,dt\,ds\,dy \right) dz \\
&= \left(x \int_0^x \int_0^y \int_0^s r(t)\,dt\,ds\,dy \right) - \int_0^x z \int_0^z \int_0^s r(t)\,dt\,ds\,dz \\
&= \int_0^x (x-z) \int_0^z \int_0^s r(t)\,dt\,ds\,dz \\
&= \underbrace{\left[-\tfrac{1}{2}(x-z)^2 \int_0^z \int_0^s r(t)\,dt\,ds \right]_{z=0}^{z=x}}_{=0} + \int_0^x \tfrac{1}{2}(x-z)^2 \int_0^z r(t)\,dt\,dz \\
&= \underbrace{\left[-\tfrac{1}{6}(x-z)^3 \int_0^z r(t)\,dt \right]_{z=0}^{z=x}}_{=0} + \tfrac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 r(t)\,dt
\end{aligned}
$$

Setze die Randbedingungen $u(1) = u'(1) = 0$ ein:

$$
\begin{aligned}
u(1) &= \int_0^1 \tfrac{1}{6}(1-t)^3 r(t)\,dt + \tfrac{c_0}{6} + \tfrac{c_1}{2} = 0 \\
u'(1) &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}(1-t)^2 r(t)\,dt + \tfrac{c_0}{2} + c_1 = 0 \\
&\Rightarrow c_1 = -\tfrac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 r(t)\,dt - \tfrac{c_0}{2} \\
&\Rightarrow \int_0^1 \tfrac{1}{6}(1-t)^3 r(t)\,dt + \tfrac{c_0}{6} - \tfrac{1}{4} \int_0^1 (1-t)^2 r(t)\,dt - \tfrac{c_0}{4} = 0 \\
&\Rightarrow c_0 = \int_0^1 \left(2(1-t)^3 - 3(1-t)^2 \right) r(t)\,dt \\
&\Rightarrow c_1 = -\tfrac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 r(t)\,dt - \int_0^1 \left((1-t)^3 - \tfrac{3}{2}(1-t)^2 \right) r(t)\,dt \\
&\qquad = \int_0^1 \left((1-t)^2 - (1-t)^3 \right) r(t)\,dt
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also für die Lösung u des inhomogenen Problems die folgende Darstellung:

$$
\begin{aligned}
u(x) = &\int_0^x \tfrac{1}{6}(x-t)^3 r(t)\,dt + \int_0^1 x^3 \left(\tfrac{1}{3}(1-t)^3 - \tfrac{1}{2}(1-t)^2 \right) r(t)\,dt + \\
&\int_0^1 \tfrac{1}{2} x^2 \left((1-t)^2 - (1-t)^3 \right) r(t)\,dt \\
= &\int_0^x \underbrace{\left(\tfrac{1}{6}(x-t)^3 - \tfrac{1}{3}x^3(1-t)^2 \left(t + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}x^2(1-t^2)t \right)}_{=:G_2(x,t)} r(t)\,dt \\
&+ \int_x^1 \underbrace{\left(-\tfrac{1}{3}x^3(1-t)^2 \left(t + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}x^2(1-t^2)t \right)}_{=:G_1(x,t)} r(t)\,dt
\end{aligned}
$$

Die Greensche Funktion ist also gegeben durch

$$
G(x,t) = \begin{cases} G_1(x,t), & 0 \le x \le t \le 1 \\ G_2(x,t), & 0 \le t \le x \le 1. \end{cases}
$$

b) $L[u] = -u'' + c^2 u$, $U_1[u] := -u(0) + u(1)$, $U_2[u] := -u'(0) + u'(1)$, $c \neq 0$.

Homogenes Problem: $-u''(x) + c^2 u(x) = 0$, $x \in [0,1]$, $u(0) = u(1)$, $u'(0) = u'(1)$. Sei u eine Lösung des hom. Problems. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 -u''(x)u(x)\,dx + c^2 \int_0^1 u^2(x)\,dx = 0,\ u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1) \\
\Rightarrow &\int_0^1 (u'(x))^2\,dx - \underbrace{[u'(x)u(x)]_0^1}_{=u'(1)u(1)-u'(0)u(0)=0} + c^2 \int_0^1 = 0 \\
\Rightarrow &\ u(x) = 0 \quad (x \in [0,1])
\end{aligned}$$

Nach Satz II.2 existiert die Greensche Funktion und ist eindeutig bestimmt. Aus dem Beweis des Satzes erhalten wir den folgenden Ansatz:

$$G(x,t) = \begin{cases} G_1(x,t) := (\alpha_1(t) + \beta_1(t))\varphi_1(x) + (\alpha_2(t) + \beta_2(t))\varphi_2(x), & 0 \le x \le t \le 1 \\ G_2(x,t) := (\alpha_1(t) - \beta_1(t))\varphi_1(x) + (\alpha_2(t) - \beta_2(t))\varphi_2(x), & 0 \le t < x \le 1 \end{cases}$$

wobei (φ_1, φ_2) ein Fundamentalsystem von $L[u] = 0$ ist. Wir wählen $\varphi_1(x) = e^{cx}$, $\varphi_2(x) = e^{-cx}$.

G muss die Eigenschaften 1) - 5) (s. Aufgabe 10) erfüllen.

In der Vorlesung hergeleitet: Aus 2) und 3) folgt

$$\begin{aligned}
\beta_1(x)\varphi_1(x) + \beta_2(x)\varphi_2(x) &= 0 \\
\beta_1(x)\varphi_1'(x) + \beta_2(x)\varphi_2'(x) &= -\frac{1}{2a_2(x)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{pmatrix} e^{cx} & e^{-cx} \\ ce^{cx} & -ce^{-cx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(x) \\ \beta_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\beta_1(x) = \frac{1}{4c}e^{-cx}$, $\beta_2(x) = -\frac{1}{4c}e^{cx}$.

Mit Hilfe von Eigenschaft 5) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
U_1[G(\cdot,t)] = 0 \iff & -(\alpha_1(t) + \beta_1(t))\varphi_1(0) - (\alpha_2(t) + \beta_2(t))\varphi_2(0) \\
& + (\alpha_1(t) - \beta_1(t))\varphi_1(1) + (\alpha_2(t) - \beta_2(t))\varphi_2(1) = 0 \\
\iff & -\alpha_1(t) - \beta_1(t) - \alpha_2(t) - \beta_2(t) + (\alpha_1(t) - \beta_1(t))e^c + (\alpha_2(t) - \beta_2(t))e^{-c} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_2[G(\cdot,t)] = 0 \iff & -(\alpha_1(t) + \beta_1(t))\varphi_1'(0) - (\alpha_2(t) + \beta_2(t))\varphi_2'(0) \\
& + (\alpha_1(t) - \beta_1(t))\varphi_1'(1) + (\alpha_2(t) - \beta_2(t))\varphi_2'(1) = 0 \\
\iff & -(\alpha_1(t) + \beta_1(t))c + (\alpha_2(t) + \beta_2(t))c + (\alpha_1(t) - \beta_1(t))ce^c - (\alpha_2(t) - \beta_2(t))ce^{-c} = 0
\end{aligned}$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 + e^c & -1 + e^{-c} \\ -1 + e^c & 1 - e^{-c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 - e^c & -1 - e^{-c} \\ -1 - e^c & 1 + e^{-c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist

$$\alpha_1(t) = -\frac{1 + e^c}{4c\,(1 - e^c)}e^{-ct}, \quad \alpha_2(t) = \frac{1 + e^{-c}}{4c\,(1 - e^{-c})}e^{ct}.$$

Aufgabe 12

In Aufgabe 8 haben wir die Greensche Funktion für das Randwertproblem $-u''(x) = r(x),\ u(0) = u(1) = 0$ berechnet:

$$G(x,t) = \begin{cases} t(1-x), & 0 \le t \le x \le 1 \\ x(1-t), & 0 \le x \le t \le 1. \end{cases}$$

Definiere den Operator $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ durch

$$T(u)(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t, u(t))\, dt.$$

Es gilt:

$$u \in C([0,1]),\ u = T(u) \iff u \in C^2((0,1)) \cap C([0,1]),\ -u''(x) = f(x, u(x)),\ u(0) = u(1) = 0.$$

Beweis: "$\Leftarrow$" Setze $r(x) = f(x, u(x))$. Dann löst u das Problem $-u''(x) = r(x)$, $u(0) = u(1) = 0$ und somit

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t) r(t)\, dt = \int_0^1 G(x,t) f(t, u(t))\, dt = Tu.$$

"$\Rightarrow$" Es gilt $u(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t,u(t))\, dt = \int_0^x G(x,t) f(t,u(t))\, dt + \int_x^1 G(x,t) f(t,u(t))\, dt$. Da $G, \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G^2}{\partial x^2} \in C(\mathring{\Delta}_1) \cap C(\mathring{\Delta}_2)$ folgt $u \in C^2((0,1))$ und nachrechnen zeigt $-u''(x) = f(x, u(x))$, $u(0) = u(1) = 0$.

Wir verwenden nun den Banach'schen Fixpunktsatz: Sei B ein Banachraum, $D \subset B, D \neq \emptyset$ eine abgeschlossende Teilmenge von B. Ist $T : D \to B$ ein Operator mit $T(D) \subset D$ und gilt $\|Tx - Ty\| \le L\|x - y\|$ für alle $x, y \in D$ mit einem festen $L < 1$, so existiert genau eine Lösung x^* der Gleichung $Tx = x$.

In unserem Fall wähle $B = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ und $D = B$. Klar: T wie oben definiert erfüllt $T(D) \subset D$ und es gilt (für alle $u_1, u_2 \in C([0,1])$):

$$\begin{aligned}
\|Tu_1 - Tu_2\|_\infty &= \max_{x\in[0,1]} |(Tu_1)(x) - (Tu_2)(x)| \\
&= \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 G(x,t) \left(f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t)) \right) dt \right| \\
&\le \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |G(x,t)|\, L |u_1(t) - u_2(t)|\, dt \\
&\le \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |G(x,t)|\, dt\, L \|u_1 - u_2\|_\infty \\
&\le \frac{L}{8} \|u_1 - u_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Wegen $L < 8$ folgt $\frac{L}{8} < 1$ und der Banachsche FPS liefert eine eindeutige Lösung $u^* \in C([0,1])$ von $Tu = u$ und somit eine Lösung des gegebenen Randwertproblems.