Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
5. Übungsblatt

Definition: Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt C^1-Gebiet, falls gilt: Zu jedem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 und ein geeignetes Koordinatensystem, so dass $U \cap \partial\Omega$ in diesem Koordinatensystem als Graph einer C^1-Funktion dargestellt werden kann.

Aufgabe 13

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1-Gebiet, $A \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n}),\ b \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n),\ c, r \in C(\overline{\Omega}),\ \gamma \in C(\partial\Omega)$.
Zeigen Sie: Ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung der schwachen Formulierung (S) des Randwertproblems

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\operatorname{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu &=& r & \text{in } \Omega \\ u &=& 0 & \text{auf } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \mu} + \gamma u &=& 0 & \text{auf } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

und gilt $u = 0$ auf Γ_0, so ist u auch eine klassische Lösung.

Aufgabe 14

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-(a(x)u'(x))' = |x| \quad (-1 < x < 1),\ u(-1) = u(1) = 0,$$

wobei

$$a(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{array} \right.$$

Geben Sie die schwache Formulierung des Problems an und bestimmen Sie die Lösung.

Aufgabe 15

Es sei V ein reeller Vektorraum und B eine symmetrische und positiv definite Bilinearform auf V, d.h.

$$B[u,v] = B[v,u], \quad \text{für alle } u, v \in V,\ B[u,u] > 0 \quad \text{für alle } u \in V\backslash\{0\}.$$

Weiter sei F ein lineares Funktional auf V. Zeigen Sie, dass das nichtlineare Funktional

$$J : \left\{ \begin{array}{lcc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \frac{1}{2}B[u,u] - F[u] \end{array} \right.$$

ein Minimum in $u_0 \in V$ annimmt, genau dann wenn

$$B[u_0, \varphi] = F[\varphi], \quad \text{für alle } \varphi \in V$$

gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 16

a) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie: $C(\overline{\Omega}) \not\subset H^1(\Omega)$.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt. Beweisen Sie: $H^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$.

Hinweis: Konstruieren Sie mit Hilfe von $\log|\log|$ ein Gegenbeispiel.

Gilt diese Aussage auch für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$?

Aufgabe 17

Es sei $\Omega = (0,1)^2$, $\Omega_1 = (0, \frac{1}{2}) \times (0,1)$, $\Omega_2 = (\frac{1}{2}, 1) \times (0,1)$. Für eine Funktion $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ gelte $u|_{\overline{\Omega}_1} \in C^1(\overline{\Omega}_1)$ sowie $u|_{\overline{\Omega}_2} \in C^1(\overline{\Omega}_2)$. Zeigen Sie:

$$u \in H^1(\Omega) \iff u \in C(\overline{\Omega}).$$

Besprechung in der Übung am 22.5.2013