Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 13

Es sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u|_{\Gamma_0} = 0$ eine schwache Lösung des gegebenen Problems, d.h.

$$\int_\Omega \left[(\nabla u)^T A \nabla\varphi + (b\cdot\nabla u)\varphi + cu\varphi\right]\,dx + \int_{\Gamma_1} \gamma u\varphi\,d\sigma = \int_\Omega r\varphi\,dx \qquad (*)$$

für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $\varphi|_{\Gamma_0} = 0$.
Da $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi|_{\Gamma_0} = 0$ und $u \in C^2(\overline{\Omega})$, folgt mit dem Satz von Gauss:

$$\int_\Omega (\nabla u)^T A\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega \operatorname{div}(A\nabla u\varphi)\,dx - \int_\Omega \operatorname{div}(A\nabla u)\varphi\,dx \overset{\text{Gauss}}{=} \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\mu}\varphi\,d\sigma - \int_\Omega \operatorname{div}(A\nabla u)\varphi\,dx.$$

Mit $(*)$ erhalten wir für alle $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi|_{\Gamma_0} = 0$:

$$\int_\Omega \underbrace{\left(-\operatorname{div}(A\nabla u) + b\nabla u + cu - r\right)}_{=:T_1}\varphi\,dx + \int_{\Gamma_1}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial\mu} + \gamma u\right)}_{=:T_2}\varphi\,d\sigma = 0. \qquad (**)$$

Wähle zunächst $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega$ (d.h. $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$)). Aus $(**)$ folgt

$$\int_\Omega T_1\varphi\,dx = 0$$

und da T_1 stetig in Ω (da A, b, c, r stetig), folgt $T_1 = 0$. Einsetzen in $(**)$ liefert nun

$$\int_{\Gamma_1} T_2\varphi\,dx = 0, \quad \text{für alle } \varphi \in C^\infty(\Omega),\ \varphi|_{\Gamma_0} = 0,$$

und mit der Stetigkeit von T_2 (γ stetig, Ω C^1-Gebiet) folgt ebenso $T_2 = 0$.
Also erfüllt u das gegebene Problem im klassischen Sinne.

Aufgabe 14

Wir beweisen zunächst ein Lemma:
<u>Lemma</u> Sei $u \in H_0^1(a,b)$ und $\int_0^1 u(x)\varphi'(x)\,dx = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$. Dann gilt $u = const.$
Beweis: Definiere $v(x) := 0$ f.f.a. $x \in (a,b)$. Dann gilt $\int_a^b u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b v(x)\varphi(x)\,dx$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$. Da $v \in L^2(a,b)$, ist v die schwache Ableitung von u, d.h. $u' = 0$ f.ü. in (a,b) und somit $u = const.$

Schwache Formulierung (multipliziere mit $\varphi \in C_0^\infty((-1,1))$ und integriere partiell): Finde $u \in H_0^1((-1,1))$, so dass

$$\int_{-1}^1 a(x)u'(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^1 |x|\varphi(x)\,dx \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty((-1,1)) \qquad (S)$$

Wir formen die Gleichung in (S) um:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} a(x)u'(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\varphi(x)\,dx \\
\iff &\int_{-1}^{0} u'(x)\varphi'(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{1} u'(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} x\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{1} x\varphi(x)\,dx \\
\iff &\int_{-1}^{0} u'(x)\varphi'(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{1} u'(x)\varphi'(x)\,dx = -\underbrace{\left|\varphi(x)\tfrac{1}{2}x^2\right|_{-1}^{0}}_{=0} + \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{0}\varphi'(x)x^2\,dx \\
&\qquad + \underbrace{\left|\varphi(x)\tfrac{1}{2}x^2\right|_{0}^{1}}_{=0} - \tfrac{1}{2}\int_{0}^{1}\varphi'(x)x^2\,dx \\
\iff &\int_{-1}^{0}\left(u'(x) - \tfrac{1}{2}x^2\right)\varphi'(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(u'(x) + x^2\right)\varphi'(x)\,dx = 0 \qquad (S_1)
\end{aligned}$$

(S_1) gilt wieder für alle $\varphi \in C_0^\infty((-1,1))$. Wählen wir zunächst $\varphi \in C_0^\infty((-1,0))$ und anschließend $\varphi \in C_0^\infty((0,1))$ so erhalten wir aus (S_1):

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0}\left(u'(x) - \tfrac{1}{2}x^2\right)\varphi'(x)\,dx = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty((-1,0)) \\
&\tfrac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(u'(x) + x^2\right)\varphi'(x)\,dx = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty((0,1))
\end{aligned}$$

Mit dem Lemma folgt nun: $u_1'(x) - \frac{1}{2}x^2 = c_1$ und $u_2'(x) + x^2 = c_2$, wobei $u_1 = u|_{[-1,0)},\ u_2 = u|_{[0,1]}$. Integrieren ergibt

$$u_1(x) = c_1 x + \tfrac{1}{6}x^3 + c_3 \qquad u_2(x) = c_2 x - \tfrac{1}{3}x^3 + c_4$$

Wegen $u(-1) = u(1) = 0$ folgt

$$-c_1 - \tfrac{1}{6} + c_3 = 0 \quad \text{und} \quad c_2 - \tfrac{1}{3} + c_4 = 0.$$

Weiter muss wegen $u \in H^1((-1,1)) \subset C([-1,1])$ gelten: $\lim_{x\to 0^-} u_1(x) = u_2(0)$, also $c_3 = c_4$. Sei nun $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty((-\varepsilon,\varepsilon))$ für $0 < \varepsilon < 1$, z.B.

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{\frac{\varepsilon^2}{x^2-\varepsilon^2}}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Einsetzen in (S) ergibt:

$$\underbrace{\int_{-\varepsilon}^{0} u_1'(x)\varphi_\varepsilon'(x)\,dx}_{=u_1'(\xi_1)\int_{-\varepsilon}^{0}\varphi_\varepsilon'(x)\,dx = u_1'(\xi_1)\frac{1}{e}} + \tfrac{1}{2}\underbrace{\int_{0}^{\varepsilon} u_2'(x)\varphi_\varepsilon'(x)\,dx}_{=u_2'(\xi_2)\int_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon'(x)\,dx = -u_2'(\xi_2)\frac{1}{e}} = -\int_{-\varepsilon}^{0} x\varphi_\varepsilon(x)\,dx + \int_{0}^{\varepsilon} x\varphi_\varepsilon(x)\,dx.$$

wobei $\xi_1 \in (-\varepsilon,0)$ und $\xi_2 \in (0,\varepsilon)$ (beachte, dass $u_1 \in C^1((-1,0))$ und $u_2 \in C^1((0,1))$ gilt). Die rechte Seite konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen 0. Lassen wir auch auf der linken Seite $\varepsilon \to 0$ gehen, so erhalten wir:

$$\lim_{\xi\to 0^-} u_1'(\xi) - \tfrac{1}{2}\lim_{\xi\to 0^+} u_2'(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \tfrac{1}{2}c_2$$

Lösen des Gleichungssystems für c_1, c_2, c_3, c_4 ergibt

$$c_1 = \tfrac{1}{18}, \quad c_2 = \tfrac{1}{9}, \quad c_3 = c_4 = \tfrac{2}{9}.$$

und die schwache Lösung des Randwertproblems ist dann

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{9}, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{9}x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{9}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Aufgabe 15

Sei

$$J : \begin{cases} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \frac{1}{2}B[u,u] - F[u] \end{cases}$$

Behauptung:

$$J \text{ nimmt Minimum in } u_0 \in V \text{ an} \quad \Longleftrightarrow \quad B[u_0, \varphi] = F[\varphi] \quad \text{für alle } \varphi \in V.$$

Beweis: "$\Rightarrow$" Da J in u_0 Minimum annimmt, gilt $J[u_0] \leq J[\varphi]$ für alle $\varphi \in V$. Wähle nun ein festes $\varphi \in V$ aus. Dann gilt:

$$g(\varepsilon) := J[u_0 + \varepsilon\varphi] \geq J[u_0] = g(0) \quad \text{für alle } \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Also nimmt die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(\varepsilon) = J[u_0 + \varepsilon\varphi]$ im Punkt 0 ihr Minimum an. Wegen

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{2}B[u_0 + \varepsilon\varphi, u_0 + \varepsilon\varphi] - F[u_0 + \varepsilon\varphi] = \frac{1}{2}B[u_0, u_0] + \varepsilon B[u_0, \varphi] + \frac{\varepsilon^2}{2}B[\varphi, \varphi] - F[u_0] - \varepsilon F[\varphi]$$

ist g differenzierbar und es folgt $g'(0) = 0$, also

$$B[u_0, \varphi] - F[\varphi] = 0.$$

Da $\varphi \in V$ beliebig gewählt, gilt $B[u_0, \varphi] = F[\varphi]$ für alle $\varphi \in V$.
"$\Leftarrow$" Sei $\varphi \in V \backslash \{0\}$ beliebig. Es gilt:

$$\begin{aligned} J[u_0 + \varphi] &= \frac{1}{2}B[u_0 + \varphi, u_0 + \varphi] - F[u_0 + \varphi] \\ &= \frac{1}{2}B[u_0, u_0] - F[u_0] + B[u_0, w] + \frac{1}{2}B[\varphi, \varphi] - F[\varphi] \\ &\overset{\text{Vor.}}{=} J[u_0] + \frac{1}{2}\underbrace{B[\varphi, \varphi]}_{>0} > J[u_0] \end{aligned}$$

J nimmt also in u_0 sein Minimum an.

Aufgabe 16

a) Betrachte zunächst $n = 1$. Sei $(a, b) \subset \Omega$ und $\tilde{x} \in (a, b)$. Definiere $u(x) = \begin{cases} \sqrt{x - \tilde{x}}, & x \geq \tilde{x} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

u ist offensichtlich stetig in $\overline{\Omega}$ und für die schwache Ableitung gilt: $\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x - \tilde{x}}}, & x > \tilde{x} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Es gilt nun

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \geq \int_{\tilde{x}}^b \frac{1}{2(x - \tilde{x})}\, dx = \infty,$$

d.h. $u \notin H^1(\Omega)$.

Für allg. Dimension n sei wieder $\tilde{x} \in \Omega$ und definiere

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \sqrt{x_1 - \tilde{x}_1}, & x_1 \geq \tilde{x}_1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt: u ist stetig in $\overline{\Omega}$ und $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x_1 - \tilde{x}_1}}, & x_1 > \tilde{x}_1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Wie im eindimensionalen folgt $u \notin H^1(\Omega)$.

Bemerkung: Ist Ω unbeschränkt, so betrachte die Funktion $u(x) = 1$ für alle $x \in \Omega$.

b) Wir betrachten zunächst den Fall $\Omega = B_{\frac{1}{3}}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und definieren $u(x, y) = \log|\log\sqrt{x^2 + y^2}|$. Zeige zunächst: $u \in L^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega |u(x,y)|^2\, d(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{3}} (\log(-\log r))^2 r\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{1}{3}} r\left(\log\left(\log\frac{1}{r}\right)\right)^2 dr$$

Wegen $r \in (0, \frac{1}{3})$ folgt $\log\frac{1}{r} > 1$ und zusammen mit $0 \le \log x \le x$ für alle $x \ge 1$ folgt $1 < \log\frac{1}{r} \le \frac{1}{r}$ für alle $r \in (0, \frac{1}{3})$. Die Monotonie von log impliziert dann $0 < \log\log\frac{1}{r} \le \log\frac{1}{r}$ für alle $r \in (0, \frac{1}{3})$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,2}^2 &\le 2\pi \int_0^{\frac{1}{3}} r \underbrace{(\log\tfrac{1}{r})^2}_{=(-\log(r))^2} dr = 2\pi \int_0^{\frac{1}{3}} r(\log r)^2\, dr \\ &= 2\pi\left[\frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\log r + \frac{r^2}{2}(\log(r))^2\right]_0^{\frac{1}{3}} < \infty \end{aligned}$$

Für die Ableitung nach x gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\log(\sqrt{x^2+y^2})}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r^2\log r}$$

und

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 d(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{3}} r\left(\frac{r\cos(\varphi))}{r^2\log r}\right)^2 dr\, d\varphi = \pi\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{r(\log r)^2}\, dr = \left[-\frac{1}{\log r}\right]_0^{\frac{1}{3}} < \infty.$$

Analoges gilt für $\frac{\partial u}{\partial y}$. Also ist $u \in H^1(\Omega)$, aber $u \notin C(\overline{\Omega})$.

Für beliebiges $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, wähle $(x_0, y_0) \in \Omega$ und $r > 0$, so dass $B_r((x_0, y_0)) \subset \Omega$. Betrachte nun die Funktion

$$v(x,y) = \begin{cases} \log|\log(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})|, & (x,y) \in B_{\frac{r}{3}}(x_0, y_0) \\ \log|\log\frac{r}{3}|, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $n \ge 3$, so betrachte zunächst $\Omega = B_1(0)$ und $u(x) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\alpha/2} = r^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\int_\Omega |u(x)|^2\, dx = c\int_0^1 r^{2\alpha} r^{n-1}\, dr < \infty, \quad \text{falls } 2\alpha + n - 1 > -1$$

Die schwache Ableitung nach x_i ist $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha(x_1^2 + \ldots + x_n)^{\frac{\alpha}{2}-1}x_i = \alpha x_i r^{\alpha-2}$ und es gilt

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx = c\int_0^1 r^{n-1} r^{2\alpha-4} r^2\, dr < \infty, \quad \text{falls } 2\alpha + n - 3 > -1$$

u ist also in $H^1(\Omega)$ genau dann wenn $2\alpha > 2 - n$. Im Fall $n \ge 3$ betrachte also die Funktion $u(r) = r^{-\frac{1}{4}}$. Nach dem eben Gezeigten ist $u \in H^1(\Omega)$, aber $u \notin C(\overline{\Omega})$.

Für beliebiges Ω kann man wieder eine ähnliche Verschiebung um einen Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ wie für $n = 2$ betrachten.

Aufgabe 17

Da $u_1 := u|_{\Omega_1} \in C^1(\overline{\Omega}_1)$ und $u_2 := u|_{\Omega_2} \in C^1(\overline{\Omega}_2)$ folgt $u \in L^2(\Omega)$. Nach Definition ist u in Ω genau dann schwach differenzierbar nach x, wenn $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega u \tfrac{\partial \varphi}{\partial x}\, d(x,y) = -\int_\Omega v\varphi\, d(x,y) \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wir betrachten die linke Seite der Gleichung ($\nu^{(1)}$ bezeichne den äußeren Einheitsnormalenvektor von $\partial\Omega_1$, $\nu^{(2)}$ den außeren Einheitsnormalenvektor von $\partial\Omega_2$):

$$\begin{aligned}\int_\Omega u \tfrac{\partial \varphi}{\partial x}\, d(x,y) &= \int_{\Omega_1} u_1 \tfrac{\partial \varphi}{\partial x}\, d(x,y) + \int_{\Omega_2} u_2 \tfrac{\partial \varphi}{\partial x}\, d(x,y) \\ &\overset{\substack{u_1 \in C^1(\overline{\Omega}_1)\\ u_2 \in C^1(\overline{\Omega}_2)}}{=} -\int_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega_1} u_1\varphi\nu_1^{(1)}\, d\sigma - \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial x}\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega_2} u_2\varphi\nu_1^{(2)}\, d\sigma\end{aligned}$$

Sei nun $\Gamma = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$. Wegen $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\nu^{(1)} = (1,0)$, $\nu^{(2)} = (-1,0)$ auf Γ folgt:

$$\int_\Omega u \tfrac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = -\int_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}\varphi\, dx - \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial x}\varphi\, dx + \int_\Gamma (u_1 - u_2)\varphi\, d\sigma \qquad (*)$$

Ist $u \in C(\overline{\Omega})$, so gilt $u_1 = u_2$ auf Γ. In diesem Fall ist u schwach differenzierbar nach x und die schwache Ableitung ist gegeben durch $\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x}, & x < \frac{1}{2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & , x > \frac{1}{2} \end{cases}$. Wegen $u_i \in C^1(\overline{\Omega}_i)$ folgt auch $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega)$.

Ist umgekehrt $u \in H^1(\Omega)$, so existiert die schwache Ableitung $v := \frac{\partial u}{\partial x}$ von u nach x in Ω. Da $u_i \in C^1(\overline{\Omega}_i)$ $(i = 1,2)$ stimmt die klassische Ableitung in Ω_i mit der schwachen überein, d.h. $v = \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x}, & x < \frac{1}{2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & , x > \frac{1}{2} \end{cases}$. Da die rechte Seite von $(*)$ gleich $-\int_\Omega v\varphi\, dx$ sein muss (Def. der schwachen Ableitung), folgt

$$\int_\Gamma (u_1 - u_2)\varphi\, d\sigma = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Wegen $u_1 - u_2 \in C(\Gamma)$ folgt nun $u_1 - u_2 = 0$ auf Γ, also $u \in C(\overline{\Omega})$.

Betrachten wir nun die schwache Ableitung nach y, so erhalten wir analog zu den Rechungen oben:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u \tfrac{\partial \varphi}{\partial y}\, d(x,y) &= \int_{\Omega_1} u_1 \tfrac{\partial \varphi}{\partial y}\, d(x,y) + \int_{\Omega_2} u_2 \tfrac{\partial \varphi}{\partial y}\, d(x,y) \\ &\overset{\substack{u_1 \in C^1(\overline{\Omega}_1)\\ u_2 \in C^1(\overline{\Omega}_2)}}{=} -\int_{\Omega_1} \tfrac{\partial u_1}{\partial y}\varphi\, d(x,y) + \int_{\partial\Omega_1} u_2\varphi\nu_2^{(1)}\, d\sigma - \int_{\Omega_2} \tfrac{\partial u_2}{\partial y}\varphi\, d(x,y) + \int_{\partial\Omega_2} u_2\varphi\nu_2^{(2)}\, d\sigma\end{aligned}$$

Da $\nu_2^{(1)} = \nu_2^{(2)} = 0$ auf Γ sind die Randintegrale Null. u ist also auch ohne die Zusatzvorausstzung der Stetigkeit immer schwach nach y differenzierbar. Umgekehrt hatten wir gesehen, dass die schwache Differenzierbarkeit nach x schon die Stetigkeit impliziert (schwache Differenzierbarkeit nach y ist nicht notwendig).