Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
6. Übungsblatt

Aufgabe 18

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Zeigen Sie die Existenz eines $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ so dass $f \cdot \nu \geq 1$ auf $\partial\Omega$ (ν bezeichne die äußere Einheitsnormale).

Hinweis: Zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ existiert eine Umgebung U, so dass f lokal als Graph einer C^1-Funktion dargestellt werden kann. Konstruieren Sie f zunächst in diesen Umgebungen und verwenden Sie (ohne Beweis) den folgenden Satz, um f auf ganz Ω zu definieren:

Satz (Zerlegung der Eins): Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $V_1, \dots, V_m \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_i.$$

Dann existieren $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(i = 1, \dots, m)$ so dass $\operatorname{supp} \varphi_i \subset V_i,\ 0 \leq \varphi_i \leq 1$ und $\varphi_1 + \ldots + \varphi_m = 1$ auf K gilt.

Aufgabe 19

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $r \in L^2(\Omega)$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\Delta\Delta u = r \ \text{ in } \Omega, \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ auf } \partial\Omega.$$

Finden Sie die zugehörige schwache Formulierung des Problems und zeigen Sie, dass das schwach formulierte Problem eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\inf \left\{ \frac{\|\Delta u\|_2}{\|u\|_{2,2}} :\ u \in H_0^2(\Omega) \backslash \{0\} \right\} > 0$.

Aufgabe 20

Es sei $p \in [1, \infty)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Zeigen Sie, dass $\left(H^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{k-\frac{1}{p},p} \right)$ ein normierter Vektorraum ist. Beweisen Sie im Fall $p = 2, k = 1$ außerdem die Vollständigkeit des Raumes.

Hinweis: Um die Vollständigkeit zu beweisen, betrachten Sie für $g \in H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ das Randwertproblem

$$(*) \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + u\varphi \, dx = 0 \quad (\varphi \in H_0^1(\Omega)), \quad u|_{\partial\Omega} = g.$$

Zeigen Sie, dass $(*)$ eine eindeutge Lösung $u^* \in H^1(\Omega)$ besitzt und definieren Sie den Operator $A : H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$ durch $A[g] := u^*$. Zeigen Sie, dass A linear und beschränkt ist.

Besprechung in der Übung am 29.5.2013