Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 18

Da Ω ein C^1-Gebiet ist, existiert zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U = U_1 \times U_2$ von x_0 ($U_1 \subset \mathbb{R}^{n-1},\ U_2 \subset \mathbb{R}$), ein geeignetes Koordinatensystem und eine Funktion $\gamma \in C^1(U_1)$, so dass gilt:

$$\Omega \cap U = \{(x_1, \dots, x_n) \in U_1 \times U_2 :\ \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) < x_n\}.$$

Für $(x_1, \dots, x_n) \in U$ gilt

$$\nu(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(1 + |\nabla\gamma|^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x_{n-1}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Behauptung: Für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ ex. eine offene Umgebung V von x_0 mit $\overline{V}$ kompakt und $f \in C^1(\overline{V}, \mathbb{R}^n)$, so dass $f \cdot \nu \geq 1$ auf $\partial\Omega \cap V$.
Beweis: Zu $x_0 \in \partial\Omega$ wähle $U = U_1 \times U_2$ sowie γ wie oben. Seien nun $V_1 \subset U_1,\ V_2 \subset U_2$ so dass $x_0 \in V_1 \times V_2 =: V$ und $\overline{V}_1,\ \overline{V}_2$ kompakt. Wegen $\gamma \in C^1(U_1)$ und $\overline{V}_1 \subset U_1$ kompakt folgt: $\sup\limits_{\overline{V}_1} |\nabla\gamma| =: M < \infty$. Setze nun

$$f : \overline{V}_1 \times \overline{V}_2 \to \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = -\sqrt{1 + M^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Offenbar gilt $f \in C^1(\overline{V}_1 \times \overline{V}_2)$. Für belibiges $x \in \partial\Omega \cap (V_1 \times V_2)$ gilt außerdem

$$f(x) \cdot \nu(x) = -\frac{\sqrt{1 + M^2}}{\sqrt{1 + |\nabla\gamma|}} \begin{pmatrix} \nabla\gamma \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1 + M^2}}{\sqrt{1 + |\nabla\gamma|^2}} \geq 1.$$

Für jedes $x \in \partial\Omega$ seien V_x eine offene Umgebung von x und $f_x \in C^1(\overline{V}_x, \mathbb{R}^n)$ mit den in der Beh. genannten Eigenschaften. Wir definieren außerdem $f_x(y) := 0$ für alle $y \in \Omega \backslash \overline{V}_x$. Es gilt:

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{x \in \partial\Omega} V_x$$

und da $\partial\Omega$ kompakt ist, folgt

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$$

(für geeignete $x_1, \dots, x_m \in \partial\Omega$). Der Satz aus dem Hinweis liefert nun Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi_i \subset V_{x_i}$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ $(i = 1, \dots, m)$ und $\sum\limits_{i=1}^m \varphi_i(x) = 1$ für alle $x \in \partial\Omega$. Definiere:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) f_{x_i}(x).$$

Wegen $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{supp}\varphi_i \subset V_{x_i}$ sowie $f \in C^1(\overline{V}_{x_i})$ folgt $f \in C^1(\Omega)$ und es gilt für alle $x \in \partial\Omega$:

$$f(x) \cdot \nu(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) f_{x_i}(x) \cdot \nu(x) = \sum_{\substack{i=1\\ x \in V_{x_i}}}^m \underbrace{\varphi_i(x)}_{\geq 0} \underbrace{f_{x_i}(x) \cdot \nu(x)}_{\geq 1} \geq \sum_{\substack{i=1\\ x \in V_{x_i}}}^m \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) = 1.$$

Aufgabe 19

Motivation zur Herleitung der schwachen Formulierung. Sei $u \in C^4(\overline{\Omega})$ eine klassische Lösung des Randwertproblems. Für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega r\varphi \, dx = \int_\Omega (\Delta\Delta u)\varphi \, dx &= \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla(\Delta u))\varphi \, dx \\
&= \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla(\Delta u)\varphi) \, dx - \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla(\Delta u) \, dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \nabla(\Delta u) \cdot \nu \underbrace{\varphi}_{=0} \, dx - \int_\Omega \operatorname{div}(\Delta u \nabla\varphi) + \int_\Omega \Delta u \Delta\varphi \, dx \\
&= -\int_{\partial\Omega} \Delta u \underbrace{\nabla\varphi \cdot \nu}_{=\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=0} \, d\sigma + \int_\Omega \Delta u \Delta\varphi \, dx
\end{aligned}$$

Für $u, \varphi \in H_0^2(\Omega)$ definiere

$$B[u, \varphi] = \int_\Omega \Delta u \Delta\varphi \, dx \qquad F[\varphi] = \int_\Omega r\varphi \, dx.$$

Die schwache Formulierung lautet: Finde $u \in H_0^2(\Omega)$ mit

$$B[u, \varphi] = F[\varphi] \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^2(\Omega) \qquad (S_a)$$

Prüfe die Voraussetzungen des Lax-Milgram-Lemmas:

(i) Seien $u, \varphi \in H_0^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$|B[u, \varphi]| = \int_\Omega \Delta u \Delta\varphi \, dx \leq \|\Delta u\|_{0,2} \|\Delta\varphi\|_{0,2}.$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Vektoren folgt

$$\|\Delta u\|_{0,2}^2 = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \cdot 1 \right)^2 dx \leq \int_\Omega n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)^2 dx \leq n\|u\|_{2,2}^2$$

also

$$|B[u, \varphi]| \leq n\|u\|_{2,2} \|\varphi\|_{2,2}.$$

(ii) Mit dem Hinweis folgt: Es ex. $c_0 > 0$, so dass $\|\Delta u\|_{0,2} \geq c_0 \|u\|_{2,2}$ für alle $u \in H_0^2(\Omega)$. Es gilt also:

$$B[u,u] = \int_\Omega (\Delta u)^2\, dx = \|\Delta u\|_{0,2} \geq c_0 \|u\|_{2,2},$$

d.h. B is $H_0^2(\Omega)$-elliptisch.

(iii) $|F[\varphi]| = \left|\int_\Omega r\varphi\, dx\right| \leq \|r\|_{0,2}\|\varphi\|_{0,2} \leq \|r\|_{0,2}\|\varphi\|_{2,2}$, also ist F beschränkt.

Mit dem Lemma von Lax-Milgram folgt somit die Existenz einer eindeutigen Lösung des schwachen Problems.

Aufgabe 20

Nach Definition:

$$H^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) := \{u|_{\partial\Omega} :\ u \in H^{k,p}(\Omega)\}$$

und für $g \in H^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$:

$$\|g\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} := \inf\left\{\|u\|_{k,p} :\ u \in H^{k,p}(\Omega),\ u_{\partial\Omega} = g\right\}.$$

(i) $\|g\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} = 0$. Dann ex. eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H^{k,p}(\Omega)$ so dass $u_n|_{\partial\Omega} = g$ gilt und $\|u_n\|_{k,p} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Mit Hilfe des Spursatzes können wir abschätzen:

$$\|g\|_{0,p,\partial\Omega} = \|u_n|_{\partial\Omega}\|_{0,p,\partial\Omega} \leq C\|u_n\|_{1,p} \overset{k\geq 1}{\leq} C\|u_n\|_{k,p} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Es folgt $\|g\|_{0,p,\partial\Omega} = 0$ und da $(L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{0,p,\partial\Omega})$ ein normierter Vektorraum ist, folgt $g = 0$.

Ist umgekehrt $g = 0$, so gilt für $u = 0 \in H^{k,p}(\Omega) :\ u|_{\partial\Omega} = 0 = g$ und folglich $\|g\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} = 0$.

(ii) $\|g\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} \geq 0$ für alle $g \in H^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$

(iii) Sei $g \in H^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|\lambda g\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} &= \inf\left\{\|u\|_{k,p} :\ u \in H^{k,p}(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = \lambda g\right\} \\
&\overset{|\lambda|>0}{=} \inf\left\{\|\lambda \tfrac{u}{\lambda}\|_{k,p} :\ u \in H^{k,p}(\Omega),\ \tfrac{u}{\lambda}|_{\partial\Omega} = g\right\} \\
&= \inf\Big\{\underbrace{\|\lambda v\|_{k,p}}_{=|\lambda|\|v\|_{k,p}} :\ v \in H^{k,p}(\Omega),\ v|_{\partial\Omega} = g\Big\} = |\lambda|\|g\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega}
\end{aligned}$$

(iv) Seien $g_1, g_2 \in H^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|g_1 + g_2\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} &= \inf\left\{\|u\|_{k,p} :\ u \in H^{k,p}(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = g_1 + g_2\right\} \\
&\leq \inf\Big\{\underbrace{\|u_1 + u_2\|_{k,p}}_{\leq\|u_1\|_{k,p}+\|u_2\|_{k,p}} :\ u_i \in H^{k,p}(\Omega),\ u_i|_{\partial\Omega} = g_i,\ i = 1,2\Big\} \\
&\leq \|g_1\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega} + \|g_2\|_{k-\frac{1}{p},p,\partial\Omega}
\end{aligned}$$

Aus (i)-(iv) folgt, dass $H^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ ein normierter Vektorraum ist.

Zeige nun: $H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ ist vollständig. Betrachte dazu das Randwertproblem

$$(*) \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + u\varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega), \qquad u|_{\partial\Omega} = g$$

Sei $\bar{u} \in H^{1,2}(\Omega)$ so dass $\bar{u}|_{\partial\Omega} = g \in H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ und definiere $v := u - \bar{u}$. Für v erhalten wir das Randwertproblem

$$(**) \qquad \underbrace{\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi + v\varphi \, dx}_{=:B[v,\varphi]} = \underbrace{\int_\Omega \nabla\bar{u} \cdot \nabla\varphi + \bar{u}\varphi \, dx}_{=:F[\varphi]} \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Wir überprüfen die Voraussetzungen von Lax-Milgram: $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$ ist ein Hilbertraum. Weiter gilt:

(i) $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist eine Bilinearform und es gilt für $v, \varphi \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |B[v,\varphi]| &\leq \|\nabla v\|_2 \|\nabla\varphi\|_2 + \|v\|_2 \|\varphi\|_2 \\ &\leq \|v\|_{1,2}\|\varphi\|_{1,2} + \|v\|_{1,2}\|\varphi\|_{1,2} = 2\|v\|_{1,2}\|\varphi\|_{1,2} \end{aligned}$$

(ii) $|B[v,v]| = \int_\Omega |\nabla v|^2 + v^2 \, dx = \|v\|_{1,2}$

(iii) $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ ist linear und es gilt $(\varphi \in H_0^1(\Omega))$: $|F[\varphi]| \leq 2\|\bar{u}\|_{1,2}\|\varphi\|_{1,2} = C\|\varphi\|_{1,2}$.

Das Randwertproblem $(**)$ besitzt somit eine eindeutige Lösung $v^* \in H_0^1(\Omega)$. Somit besitzt auch das RWP $(*)$ eine Lösung (beachte, die Wahl von $\bar{u}$ ist nicht eindeutig, deshalb folgt noch nicht die Eindeutigkeit der Lösung). Sind u_1, u_2 Lösungen von $(*)$, so gilt für die Differenz $v = u_1 - u_2$:

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi + v\varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega), \qquad v|_{\partial\Omega} = 0$$

Da dieses Problem nur die triviale Lösung besitzt, folgt $v = 0$ und $u_1 = u_2$.
Definiere nun den Operator $A : H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$ durch $A[g] = u^*$, wobei u^* wie eben die eindeutige Lösung des RWP $(*)$ ist. Zeige: A ist linear und beschränkt:

(i) Seien $g_1, g_2 \in H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha g_1 + \beta g_2 \in H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ und $A(\alpha g_1 + \beta g_2) = u$ wobei gilt

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + u\varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega), \qquad u|_{\partial\Omega} = \alpha g_1 + \beta g_2.$$

Für die Funktion $w = \alpha A[g_1] + \beta A[g_2] \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla\varphi + w\varphi \, dx = \alpha \int_\Omega \nabla(A[g_1]) \cdot \nabla\varphi + A[g_1]\varphi \, dx + \beta \int_\Omega \nabla(A[g_2]) \cdot \nabla\varphi + A[g_2]\varphi \, dx = 0$$
$$w|_{\partial\Omega} = \alpha(A[g_1])|_{\partial\Omega} + \beta(A[g_2])|_{\partial\Omega} = \alpha g_1 + \beta g_2$$

Also sind die Funktionen $A[\alpha g_1 + \beta g_2]$ und $w = \alpha A[g_1] + \beta A[g_2]$ beides Lösungen von $(*)$ (mit $g = \alpha g_1 + \beta g_2$). Wegen der eindeutigen Lösbarkeit von $(*)$ folgt somit $A[\alpha g_1 + \beta g_2] = \alpha A[g_1] + \beta A[g_2]$.

(ii) Sei $u^* \in H^1(\Omega)$ eine Lösung von $(*)$ und $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ mit $\bar{u}|_{\partial\Omega} = g$. Dann ist $\varphi := u^* - \bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ und einsetzen von φ in $(*)$ liefert:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u^* \cdot \nabla(u^* - \bar{u}) + u^*(\bar{u} - u^*)\, dx = 0 \\
\Rightarrow\ &\underbrace{\int_\Omega |\nabla u^*|^2 + (u^*)^2\, dx}_{=\|u^*\|_{1,2}^2} = \int_\Omega \nabla u^* \cdot \nabla \bar{u} + u^* \bar{u}\, dx \leq 2\|u^*\|_{1,2}\|\bar{u}\|_{1,2} \\
\Rightarrow\ &\|u^*\|_{1,2} \leq 2\|\bar{u}\|_{1,2} \qquad \text{für alle } \bar{u} \in H^1(\Omega) \text{ mit } \bar{u}|_{\partial\Omega} = g \\
\Rightarrow\ &\underbrace{\|u^*\|_{1,2}}_{=\|A[g]\|_{1,2}} \leq 2\inf\{\|\bar{u}\|_{1,2} :\ \bar{u} \in H^1(\Omega),\ \bar{u}|_{\partial\Omega} = g\} = 2\|g\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega} \\
\Rightarrow\ &\|A\| \leq 2
\end{aligned}$$

Sei nun $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\left(H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{\frac{1}{2},2}\right)$. Definiere $u_n := A[g_n],\ n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $H^1(\Omega)$ mit

$$\|u_n - u_m\|_{1,2} \leq \underbrace{\|A\|}_{\leq 2} \|g_n - g_m\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega}.$$

Also ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $H^1(\Omega)$ und wegen der Vollständigkeit von $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,2})$ folgt: Es ex. ein $u \in H^1(\Omega)$ mit $\|u_n - u\|_{1,2} \to 0$ $(n \to \infty)$.
Definiere $g := u|_{\partial\Omega} \in H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$. Dann gilt:

$$\|g_n - g\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega} = \inf\{\|w\|_{1,2} :\ w \in H^1(\Omega), w|_{\partial\Omega} = g_n - g\} \overset{(u_n-u)|_{\partial\Omega} = g_n - g}{\leq} \|u_n - u\|_{1,2} \to 0\ (n \to \infty)$$

Also gilt $g_n \to g \in H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ und $\left(H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega}\right)$ ist vollständig.