Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
7. Übungsblatt

Aufgabe 21

Es sei $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Doppelfolge mit $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < \infty$. Weiterhin sei für alle $N \in \mathbb{N}$ die Matrix $A_N := (a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ positiv definit. Zeigen Sie, dass für jedes $f = (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2$ die Gleichung

$$u_i + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}u_j = f_i \quad \text{für alle} \quad i \in \mathbb{N}$$

eine eindeutige Lösung $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2$ besitzt.
Hinweis: $l^2 = \{(x_1, x_2, \dots) : \ x_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, \dots),\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$ und $\langle x, y\rangle_{l^2} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ für $x, y \in l^2$. Sie können ohne Beweis verwenden, dass $(l^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{l^2})$ ein Hilbertraum ist.

Aufgabe 22

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $f \in L^2(\Omega)$. Geben Sie die schwache Formulierung des Randwertproblems

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

an und beweisen Sie, dass $(*)$ genau dann eine schwache Lösung besitzt, wenn $\int_\Omega f(x)\,dx = 0$ gilt.

Aufgabe 23

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und weiter gelten die Voraussetzungen $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega),\ (i, j = 1\dots, n)$ sowie $f \in L^2(\Omega)$.
Finden Sie die schwache Formulierung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta\Delta u - \operatorname{div}(A\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu &= f \quad \text{in } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

(s. auch Aufgabe 19) und leiten Sie für dieses Problem einen Alternativsatz her.
Hinweis: Beweisen Sie zunächst eine passende Gårdingsche Ungleichung.

Bitte wenden!

Aufgabe 23

Es sei $(H, \langle , \cdot , \rangle)$ ein Hilbertraum sowie $S, T : H \to H$ lineare Operatoren. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist S beschränkt und T kompakt, so sind $S \circ T$ und $T \circ S$ kompakt.

b) Ist T kompakt, so ist auch T^2 kompakt.

c) Ist T^2 kompakt, so ist auch T kompakt.

d) Gilt $\dim(\text{Bild}(T)) < \infty$, so ist T kompakt.

e) Gilt $\dim(\text{Bild}(T)) < \infty$ und ist T beschränkt, so ist T kompakt.

Aufgabe 24

Besprechung in der Übung am 5.6.2013