Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 21

Wir beweisen zunächst: Das geg. Problem ist äquivalent zu: Finde $u \in l^2$ mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i\varphi_i + \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}u_j\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_j\varphi_i \quad \text{für alle } \varphi \in l^2$$

"$\Rightarrow$" Multipliziere die Gleichung $u_i + \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}u_j = f_i$ mit φ_i und summiere.
"$\Leftarrow$" Wähle $\varphi^{(i)} = e_i = (0,\dots,0,\underbrace{1}_{\text{i-te Komp.}},0,\dots) \in l^2$ und setze ein.

Definiere nun für $u,\varphi \in l^2$:

$$B[u,\varphi] := \sum_{i=1}^{\infty} u_i\varphi_i + \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}u_j\varphi_i$$

$$F[\varphi] := \sum_{i=1}^{\infty} f_i\varphi_i = \langle f,\varphi\rangle_{l^2}$$

Es gilt:

(i) F beschränkte Linearform auf l^2, da mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt:

$$|F[\varphi]| \le \|f\|_{l^2}\|\varphi\|_{l^2} \quad \Rightarrow \quad \|F\| \le \|f\|_{l^2}$$

(ii) B beschränkt: Seien $u,\varphi \in l^2$:

$$\begin{aligned}
|B[u,\varphi]| &= \sum_{i=1}^{\infty} u_i\varphi_i + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}u_j\right)\varphi_i \\
&\overset{\text{CSU}}{\le} \|u\|_{l^2}\|\varphi\|_{l^2} + \|\varphi\|_{l^2}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}u_j\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{\text{CSU}}{\le} \|u\|_{l^2}\|\varphi\|_{l^2} + \|\varphi\|_{l^2}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2\|u\|_{l^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \|u\|_{l^2}\|\varphi\|_{l^2}\left(1 + \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty}\right)
\end{aligned}$$

(iii) B ist l^2-elliptisch: Da $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < \infty$, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{\substack{i>N \text{ oder} \\ j>N}} a_{ij}^2 < \frac{1}{4}$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
B[u,u] &= \|u\|_{l^2}^2 + \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} u_i u_j \\
&= \|u\|_{l^2}^2 + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} u_i u_j}_{(u_1,\dots,u_N)^T A_N (u_1,\dots,u_N)>0} + \sum_{\substack{i>N \text{ oder} \\ j>N}} a_{ij}^2 u_i u_j \\
&\geq \|u\|_{l^2}^2 - \sum_{\substack{i>N \text{ oder} \\ j>N}} |a_{ij}||u_i||u_j| \\
&\geq \|u\|_{l^2}^2 - \left(\sum_{\substack{i>N \text{ oder} \\ j>N}} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{l^2}^2 \\
&> \|u\|_{l^2}^2 - \tfrac{1}{2}\|u\|_{l^2}^2 = \tfrac{1}{2}\|u\|_{l^2}^2
\end{aligned}$$

Mit dem Lax-Milgram-Lemma folgt die Existenz einer eindeutigen Lösung $u \in l^2$ mit $B[u,\varphi] = F[\varphi]$ für alle $\varphi \in l^2$ und nach dem oben Bewiesenen somit die eindeutige Lösbarkeit des geg. Problems.

Aufgabe 22

Die schwache Formulierung des Neumann-Problems ist gegeben durch: Finde $u \in H^1(\Omega)$ mit

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx}_{=:B[u,\varphi]} = \underbrace{\int_\Omega f \varphi \, dx}_{=:F[\varphi]} \qquad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega).$$

Es gilt:

$$B[u,u] = \|\nabla u\|_2^2 = \|u\|_{1,2}^2 - \|u\|_2^2,$$

d.h. die Gårding'sche Ungleichung ist mit $\delta = 1$ und $\mu = 1$ erfüllt. Weiter ist jede Konstante eine Lösung des homogenen Problems. Mit dem Alternativsatz folgt nun, dass das inhomogene Problem genau dann lösbar ist, wenn $Kf \in (\mathrm{Kern}(Id - K^*))^\perp$ gilt (beachte, dass $H^1(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt $\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx$ ein Hilbertraum ist).
Erinnerung an die Definition von T und K: Es bezeichne $\hat{u}_f \in H^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung des Problems

$$(*_\mu) \quad B_\mu[u,\varphi] = B[u,\varphi] + \langle u, \varphi\rangle_{L^2} = F_f[\varphi] = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega).$$

Es ist

$$T : L^2(\Omega) \to H^1(\Omega), \quad f \mapsto \hat{u}_f$$

der Lösungsoperator, der $f \in L^2(\Omega)$ auf die Lösung $\hat{u}_f \in H^1(\Omega)$ des Problems $(*_\mu)$ abbildet. T ist beschränkt und linear (s. Vorlesung). Weiter ist die Einbettung $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt und K ist definiert durch

$$K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad u \mapsto i(Tu).$$

Wir zeigen nun: $K^* = K$, d.h. für alle $f, g \in L^2(\Omega)$ gilt $\langle Kf, g\rangle_{L^2} = \langle f, Kg\rangle_{L^2}$. Bezeichne mit $\hat{u}_f = T(f)$ bzw. $\hat{u}_g = T(g) \in H^1(\Omega)$ die Lösung von $(*_\mu)$ mit rechter Seite F_f bzw. F_g. Dann gilt:

$$B_\mu[\hat{u}_f, \varphi] = F_f[\varphi] \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega) \tag{1}$$

sowie

$$B_\mu[\hat{u}_g, \varphi] = F_g[\varphi] \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega) \tag{2}$$

Einsetzen von $\varphi = \hat{u}_g$ in (1) und $\varphi = \hat{u}_f$ in (2) liefert:

$$B_\mu[\hat{u}_f, \hat{u}_g] = F_f[\hat{u}_g] = \int_\Omega f\hat{u}_g\,dx \qquad \text{und} \qquad B_\mu[\hat{u}_g, \hat{u}_f] = F_g[\hat{u}_f] = \int_\Omega g\hat{u}_f\,dx$$

Wegen der Symmetrie von B_μ gilt nun:

$$\begin{aligned}\langle Kf, g\rangle_{L^2} = \int_\Omega (Tf)g\,dx = \int_\Omega \hat{u}_f g\,dx = B_\mu[\hat{u}_g, \hat{u}_f] &= B_\mu[\hat{u}_f, \hat{u}_g] \\ &= \int_\Omega \hat{u}_g f\,dx = \int_\Omega f(Tg)\,dx = \langle f, Kg\rangle_{L^2}\end{aligned}$$

Damit folgt, dass das ursprüngliche Randwertproblem eine eindeutige Lösung besitzt, genau dann wenn $Kf \in (\mathrm{Kern}(Id - K))^\perp$ gilt, d.h. $\langle Kf, v\rangle_{L^2} = 0$ für alle $v \in H^1(\Omega)$ mit $(Id - K)v = 0 \iff Kv = v$. Die letzte Bedingung ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi + v\varphi\,dx = \int_\Omega v\varphi\,dx \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega) \\ \iff &\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi\,dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in H^1(\Omega) \\ \iff &v = \text{const.}\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}Kf \in (\mathrm{Kern}(Id - K))^\perp &\iff \int_\Omega Kf\,dx = 0 \iff \underbrace{\int_\Omega \hat{u}_f\,dx}_{=B_\mu[\hat{u}_f,1]=F_f[1]} = 0 \\ &\iff \int_\Omega f\,dx = 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 23

Die schwache Formulierung des Randwertproblems ist gegeben durch: Finde $u \in H_0^2(\Omega)$ mit

$$\underbrace{\int_\Omega \Delta u\Delta\varphi + (\nabla u)^T A\nabla\varphi + b \cdot \nabla u\varphi + cu\varphi\,dx}_{=:B[u,\varphi]} = \underbrace{\int_\Omega f\varphi\,dx}_{=:F[\varphi]} \qquad \text{für alle } \varphi \in H_0^2(\Omega).$$

Es gilt: $(H_0^2(\Omega), \|\cdot\|_{2,2})$ ist ein Hilbertraum und B ist eine Bilinearform auf $H_0^2(\Omega)$. Mit dem Hinweis aus Aufgabe 19 gilt: Es ex. $C_1 > 0$ mit $\|\Delta u\|_2^2 \geq C_1\|u\|_{2,2}^2$ für alle $u \in H_0^2(\Omega)$. Wir zeigen zunächst, dass eine zur Garding-Ungleichung analoge Ungleichung gilt. Sei $u \in H_0^2(\Omega)$. Dann gilt (beachte, dass a_{ij} und b_i beschränkt sind):

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (\nabla u)^T A\nabla u\,dx\right| &\leq \|\nabla u\|_2\|A\nabla u\|_2 \leq C_2\|\nabla u\|_2^2 \\ \left|\int_\Omega (b \cdot \nabla u)u\,dx\right| &\leq C_3\|\nabla u\|_2\|u\|_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\implies \quad B[u,u] &= \|\Delta u\|_2^2 + \int_\Omega \left[(\nabla u)^T A \nabla u + (b \cdot \nabla u)\, u + cu^2 \right] \, dx \\ &\geq C_1 \|u\|_{2,2}^2 - C_2 \|\nabla u\|_2^2 - C_3 \|\nabla u\|_2 \|u\|_2 - \|c\|_\infty \|u\|_2^2 \\ &\overset{\text{Young}}{\geq} C_1 \|u\|_{2,2}^2 - C_2 \|\nabla u\|_2^2 - \tfrac{C_3}{2} \left(\varepsilon \|\nabla u\|_2^2 + \tfrac{1}{\varepsilon} \|u\|_2^2 \right) - \|c\|_\infty \|u\|_2^2 \\ &= C_1 \|u\|_{2,2}^2 - \|\nabla u\|_2^2 \left(C_2 + \tfrac{C_3}{2} \varepsilon \right) - \|u\|_2^2 \left(\tfrac{C_3}{2\varepsilon} + \|c\|_\infty \right)\end{aligned}$$

Wir schreiben $\|\nabla u\|_2^2$ als Integral und integrieren partiell:

$$0 \leq \|\nabla u\|_2^2 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx = - \int_\Omega \Delta u \, u \, dx \leq \|\Delta u\|_2 \|u\|_2 \leq \tfrac{1}{2} \left(\lambda \|\Delta u\|_2^2 + \tfrac{1}{\lambda} \|u\|_2^2 \right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}B[u,u] &\geq C_1 \|u\|_{2,2}^2 - \tfrac{\lambda}{2} \left(C_2 + \tfrac{C_3}{2} \varepsilon \right) \underbrace{\|\Delta u\|_2^2}_{\leq \tilde{C} \|u\|_{2,2}^2} - \|u\|_2^2 \left(\tfrac{C_3}{2\varepsilon} + \|c\|_\infty + \tfrac{1}{2\lambda} \left(C_2 + \tfrac{C_3}{2} \varepsilon \right) \right) \\ &\geq \underbrace{C_1 - \tilde{C} \tfrac{\lambda}{2} \left(C_2 + \tfrac{C_3}{2} \varepsilon \right)}_{=:\delta} \|u\|_{2,2}^2 - \|u\|_2^2 \underbrace{\left(\tfrac{C_3}{2\varepsilon} + \|c\|_\infty + \tfrac{1}{2\lambda} \left(C_2 + \tfrac{C_3}{2} \varepsilon \right) \right)}_{=:\mu}\end{aligned}$$

Wähle nun $\lambda > 0$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\delta > 0$ gilt.
Definiere $B_\mu : H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \to \mathbb{R},\ B_\mu[u,v] = B[u,v] + \mu \langle u, v \rangle_{L^2}$. Es gilt:

(a) B_μ beschränkt:

$$|B_\mu[u,v]| \leq |B[u,v]| + \mu \langle u,v \rangle_{L^2} \leq \underbrace{\|\Delta u\|_2 \|\Delta v\|_2}_{\leq \tilde{C} \|u\|_{2,2} \|v\|_{2,2}} + C \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2} + \mu \|u\|_2 \leq (\tilde{C} + C + \mu) \|u\|_{2,2} \|v\|_{2,2}$$

(b) B_μ elliptisch wegen der obigen Gårding-Ungleichung

Mit dem Lemma von Lax-Milgram folgt, dass das RWP

$$B_\mu[u,\varphi] = \hat{F}[\varphi] = \int_\Omega \hat{r} \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^2(\Omega)$$

eine eindeutige Lösung $\hat{u} \in H_0^2(\Omega)$ besitzt für jedes $\hat{r} \in L^2(\Omega)$. Definiere den Lösungsoperator

$$T : L^2(\Omega) \to H_0^2(\Omega), \qquad \hat{r} \mapsto \hat{u}.$$

Linearität und Beschränktheit von T zeigt man wie in der Vorlesung. Definiere

$$K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad u \mapsto \mu \, i_2(Tu)$$

wobei $i_2 : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ die Einbettung von $H^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ ist. Ist i_1 die Einbettung von $H^2(\Omega)$ nach $H^1(\Omega)$ so gilt $i_2 = i \circ i_1$. Da $i_1 : H^2(\Omega) \to H^1(\Omega)$ beschränkt ($\|i_1(u)\|_{1,2} = \|u\|_{1,2} \leq \|u\|_{2,2}$) und $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt, ist i_2 ebenfalls kompakt und es folgt die Kompaktheit von K.
Transformiere nun das Randwertproblem:

$$\begin{aligned}&B[u,\varphi] = \int_\Omega r \varphi \, dx = F[\varphi] \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^2(\Omega) \\ \iff\ & B_\mu[u,\varphi] = F[\varphi] + \mu \langle u, \varphi \rangle_{L^2} = \int_\Omega (r + \mu u) \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^2(\Omega) \\ \iff\ & \text{Finde } u \in H_0^{2,2}(\Omega) \text{ mit } \ u = T(r + \mu u) \\ \iff\ & \text{Finde } u \in L^2(\Omega) \text{ mit } \ u = T(r + \mu u) = Tr + \mu T u \\ \iff\ & \text{Finde } u \in L^2(\Omega) \text{ mit } \ u = \underbrace{Tr}_{=:s} + \mu i_2(u) = s + Ku\end{aligned}$$

Da K kompakt ist, erhalten wir mit der Fredholm-Alternative den folgenden

Satz
Entweder

(i) das homogene Problem $u \in H_0^2(\Omega)$: $B[u,\varphi] = 0 \; \forall \varphi \in H_0^2(\Omega)$ besitzt nur die triviale Lösung und das inhomogene Problem $B[u,\varphi] = \int_\Omega r\varphi \, dx \; \forall \varphi \in H_0^2(\Omega)$ besitzt eine eindeutige Lösung für alle $r \in L^2(\Omega)$

oder

(ii) Das homogene Problem besitzt nicht-triviale Lösungen und das inhomogene Problem ist nicht für alle $r \in L^2(\Omega)$ lösbar. Besitzt das inhomogene Problem eine Lösung, so ist sie nicht eindeutig. Eine Lösung existiert, falls $Kr \in (\mathrm{Kern}(Id - K^*))^\perp$ gilt.

Aufgabe 24

a) wahr: Sei $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in H. Dann besitzt $(Tu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(Tu_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Da S linear und beschränkt, ist S stetig und somit $(S(Tu_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dies beweist die Kompaktheit von $S \circ T$. Andererseits folgt mit der Beschränktheit von S die Beschränktheit der Folge $(S(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ und die Kompaktheit von T impliziert, dass $(T(S(u_k)))_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Also ist auch $T \circ S$ kompakt.

b) wahr, da jeder kompakte Operator beschränkt ist. Verwende a)
Beweis von T kompakt $\Rightarrow$ T beschränkt: Angenommen, T wäre nicht beschränkt. Dann ex. Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\|u_k\| = 1$ und $\|Tu_k\| \to \infty$ für $k \to \infty$. Da $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, besitzt $(Tu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(Tu_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} \|Tu_{k_n}\| \leq C$ ↯.

c) falsch: Wähle $H = l^2$ und $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, 0, x_4, 0, x_6, \ldots)$. Dann ist $T^2 = 0$ kompakt, aber für die Folge $(e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: $(e_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt ($\|e_{2n}\| = 1$) aber $(Te_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (e_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge.

d) falsch (falls $\dim H = \infty$): In jedem Hilbertraum ex. eine algebraische Basis (Hamelbasis), d.h. $B = \{x_i, i \in I\}$ und jedes $x \in H$ lässt sich eindeutig darstellen durch $x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ wobei nur endlich viele $\alpha_i \neq 0$ sind (jedes x ist endliche Linearkombination der x_i). O.B.d.A. gelte $\mathbb{N} \subset I$ und $\|x_i\| = 1$.

Sei nun T der lineare Operator mit $Tx_i = ix_1$ für $i \in \mathbb{N}$, $Tx_i = x_1$ sonst. Dieser ist auf ganz H definiert, da B algebraische Basis. Offenbar gilt $\dim(\mathrm{Bild}\, T) = 1 < \infty$, aber für die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\|x_i\| = 1, \quad \text{und} \quad \|Tx_i\| = \|ix_1\| = i \to \infty \; (i \to \infty),$$

d.h. $(Tx_i)_{i\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge.

e) Ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist auch $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt (da T beschränkt) und liegt in einem endlich-dimensionalen Teilraum von H. Nach Bolzano-Weierstraß besitzt jede beschränkte Folge (in einem endlich-dimensionalen VR) eine konvergente Teilfolge und somit ist T kompakt.