Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

SS 2013

Rand- und Eigenwertprobleme
8. Übungsblatt

Aufgabe 24

Es sei $u \in H_0^1(0,1)$ eine schwache Lösung von

$$-u'' + bu' + cu = f \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

wobei $b, c \in L^\infty(0,1)$, $f \in L^2(0,1)$ gilt. Zeigen Sie, dass $u \in H^2(0,1)$ gilt und dass u die Gleichung $-u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x)$ punktweise fast überall in $(0,1)$ erfüllt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist $u \in H_0^1(0,1)$ und gilt

$$\left| \int_0^1 u'\varphi' \, dx \right| \leq C\|\varphi\|_2 \quad (\varphi \in H_0^1(0,1))$$

für ein $C > 0$, so folgt $u \in H^2(0,1)$.

Aufgabe 25

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Betrachten Sie für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ die folgenden Eigenwertprobleme

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u - \lambda u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases} ; \qquad (2) \quad \begin{cases} -\Delta u - \lambda u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega}) \backslash \{0\}$ von (1) nicht gleichzeitig Lösung von (2) sein kann.

   Hinweis: Leiten Sie für eine Lösung von (1) durch Integration von $(\Delta u + \lambda u)(\nabla u \cdot x)$ und Anwendung des Gauss'schen Integralsatzes die folgende Gleichung her:

$$n\lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (x \cdot \nu) \, d\sigma$$

b) Berechnen Sie im Fall $\Omega = (0,1)^2$ alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von (1) und (2).

Bitte wenden!

Aufgabe 26

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets ein beschränktes Gebiet. Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis des folgenden Regularitätssatzes:

Satz 1 (Regularität im Inneren): Es sei $Lu := -\Delta u + cu$ mit $c \in L^\infty(\Omega)$, und $u \in H^1(\Omega)$ sei eine schwache Lösung der Gleichung $Lu = f$, wobei $f \in L^2(\Omega)$ gelte. Dann folgt für jedes $V \subset\subset \Omega$:

$$u \in H^2(V) \quad \text{sowie} \quad \|u\|_{H^2(V)} \le C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Für den Beweis werden die folgenden Hilfsmittel benötigt (die Sie ohne Beweis verwenden dürfen):

Definition:

Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $V \subset\subset \Omega$. Für $x \in V$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < \operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$ definiere den i-ten Differenzenquotienten:

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Weiter sei $D^h u := \left(D_1^h u, \dots, D_n^h u\right)$.

Satz 2

a) Sei $u \in H^1(\Omega)$. Dann existiert zu jedem $V \subset\subset \Omega$ eine Konstante $C > 0$ so, dass $\|D^h u\|_{L^2(V)} \le C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ für alle $0 < |h| < \operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$ gilt.

b) Es sei $u \in L^2(V)$ und es existiere eine Konstante $C > 0$ so dass $\|D^h u\|_{L^p(V)} \le C$ gilt für alle $0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$. Dann folgt $u \in H^1(V)$ und $\|\nabla u\|_{L^p(V)} \le C$.

Um Satz 1 zu beweisen, gehen Sie folgendermaßen vor:

(i) Zu einer offenen Menge $V \subset\subset \Omega$ wähle W offen mit $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$. Sei $\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Abschneidefunktion mit den Eigenschaften: $0 \le \zeta \le 1$, $\zeta \equiv 1$ in V, $\zeta \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \backslash W$.

(ii) Zu $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| > 0$ genügend klein und $k \in \{1, \dots, n\}$ wähle $v := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)$. Setzen Sie v in die schwache Formulierung von $Lu = f$ ein. Sie erhalten $A = B$, wobei

$$A := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{sowie} \quad B := \int_\Omega (f - cu) v \, dx$$

(iii) Zeigen Sie: $A \ge \frac{1}{2} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 \, dx - C \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$ sowie $|B| \le \frac{1}{4} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx + C \int_\Omega f^2 + u^2 \, dx$. (Hinweis: Die Youngsche Ungleichung ist ebenfalls hilfreich)

(iv) Folgern Sie nun $u \in H^2(V)$ und $\|u\|_{H^2(V)} \le C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right)$

(v) Für eine zweite Abschneidefunktion ζ_2 mit $\zeta_2 \equiv 1$ in W, $0 \le \zeta_2 \le 1$ und $\operatorname{supp}(\zeta_2) \subset \Omega$ definiere $v_2 = \zeta_2^2 u$. Setzen Sie v_2 in die schwache Formulierung ein und leiten Sie die Ungleichung $\|u\|_{H^1(W)} \le C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$ her.

Besprechung in der Übung am 12.6.2013