Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 24

Definiere $\Omega := (0,1)$. Wir beweisen zunächst das folgende
Lemma Sei $u \in H_0^1(\Omega)$. Gilt für ein $C > 0$

$$(*) \qquad \left| \int_0^1 u'\varphi' \, dx \right| \leq C\|\varphi\|_2 \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

so folgt $u \in H^2(\Omega)$.
Beweis: Definiere $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch $F[\varphi] = \int_0^1 u'\varphi' \, dx$. F ist linear und wegen $(*)$ ist F beschränkt bzgl. der L^2-Norm.
Behauptung: Es ex. ein stetiges lineares Funktional $\tilde{F} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{F}|_{H_0^1(\Omega)} = F$
Beweis: Da $H_0^1(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ (bzgl. der $\|\cdot\|_2$-Norm), ex. zu jedem $v \in L^2(\Omega)$ eine Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ mit $\|v_k - v\|_2 \to 0$ $(k \to \infty)$.
Betrachte die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k := \int_0^1 u'v_k' \, dx$, $k \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$|x_k| \leq C\|v_k\|_2 \leq \tilde{C}$$

(da v_k konvergente Folge in $L^2(\Omega)$). $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist somit beschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Also existiert $\lim_{j\to\infty} \int_0^1 u'v_{k_j}' \, dx$.
Es folgt: Zu jedem $v \in L^2(\Omega)$ ex. $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\|v_k - v\|_2 \to 0$ $(k \to \infty)$ und so dass $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 u'v_k' \, dx$ existiert.
Definiere

$$\tilde{F} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \tilde{F}[v] = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 u'v_k' \, dx$$

Noch zu zeigen: $\tilde{F}[v]$ ist unabhängig von der gewählten Folge: Seien $(v_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}, (v_k^{(2)})_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ zwei Folgen mit den oben genannten Eigenschaften. Dann gilt $(v_k^{(1)} - v_k^{(2)} \in H_0^1(\Omega))$:

$$\int_0^1 u'(v_k^{(1)} - v_k^{(2)})' \, dx \leq C\|v_k^{(1)} - v_k^{(2)}\|_2 \leq C\|v_k^{(1)} - v\|_2 + C\|v_k^{(2)} - v\|_2 \to 0 \quad (k \to \infty)$$

Also folgt $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^1 u'(v_k^{(1)})' \, dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int_0^1 u'(v_k^{(2)})' \, dx$, was die Wohldefiniertheit von $\tilde{F}$ beweist.
Weiter gilt $\tilde{F}|_{H_0^1} = F$ (wähle $v_k = v$) und wegen $(*)$ und der Konvergenz der Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist $\tilde{F}$ stetig:

$$|\tilde{F}[v]| \leq \lim_{k\to\infty} \left| \int_0^1 u'v_k' \, dx \right| \leq \lim_{k\to\infty} C\|v_k\|_2 = C\|v\|_2.$$

Dies beweist die Behauptung. Nun weiter mit dem Beweis des Lemmas:

Nach dem Satz von Riesz ex. ein eindeutiges $w \in L^2(\Omega)$ mit $\tilde{F}[\varphi] = \langle w, \varphi \rangle_{L^2} = \int_0^1 w\varphi\, dx$ (für alle $\varphi \in L^2(\Omega)$). Ist $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, so gilt

$$\int_0^1 u'\varphi'\, dx = F[\varphi] = \tilde{F}[\varphi] = \int_0^1 w\varphi\, dx = -\int_0^1 (-w)\varphi\, dx.$$

Es folgt, dass u' schwach differenzierbar ist mit schwacher Ableitung $(u')' = -w \in L^2(\Omega)$. Dies zeigt $u \in H^2(\Omega)$. □

Es sei nun $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung des geg. Problems, d.h. u erfüllt

$$\int_0^1 u'\varphi'\, dx = \int_0^1 f\varphi\, dx - \int_0^1 bu'\varphi\, dx - \int_0^1 cu\varphi\, dx \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Es folgt:

$$\left| \int_0^1 u'\varphi'\, dx \right| \leq \|f\|_2 \|\varphi\|_2 + \|b\|_\infty \|u'\|_2 \|\varphi\|_2 + \|c\|_\infty \|u\|_2 \|\varphi\|_2 \leq C\|\varphi\|_2,$$

da $u \in H_0^1(\Omega)$. Mit dem Lemma folgt $u \in H^2(\Omega)$ und damit

$$\int_\Omega (-u'' + bu' + cu - f)\varphi\, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

was $-u'' + bu' + cu - f = 0$ fast überall in Ω impliziert.

Aufgabe 25

a) Es sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von (1). Mit Hilfe des Gauss'schen Integralsatzes gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (\Delta u + \lambda u) u\, dx = \int_\Omega \Delta u u\, dx + \lambda \int_\Omega u^2\, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} u\, d\sigma - \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \lambda \int_\Omega u^2\, dx \\ &\overset{u=0 \text{ auf } \partial\Omega}{=} - \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \lambda \int_\Omega u^2\, dx \quad (**) \end{aligned}$$

Wir verwenden nochmal den Satz von Gauss und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (\Delta u + \lambda u)(\nabla u \cdot x)\, dx \\ &= \int_\Omega (\Delta u)(\nabla u \cdot x)\, dx + \lambda \int_\Omega u\, \nabla u \cdot x\, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \nabla u \cdot x\, d\sigma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\nabla u \cdot x)\, dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \left[\operatorname{div}\left(x u^2\right) - n u^2 \right]\, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \nabla u \cdot x\, d\sigma - n \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega (\nabla u)^T (D^2 u) x\, dx - \frac{n\lambda}{2} \int_\Omega u^2\, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \nabla u \cdot x\, d\sigma - n \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\operatorname{div}\left(x |\nabla u|^2\right) - n|\nabla u|^2 \right]\, dx - \frac{n\lambda}{2} \int_\Omega u^2\, dx \\ &\overset{(**),\ \text{Gauss}}{=} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \nabla u \cdot x\, d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (x \cdot \nu)\, d\sigma - \lambda n \int_\Omega u^2\, dx \qquad (***) \end{aligned}$$

Da $u = 0$ auf dem Rand von Ω gilt, folgt ∇u orthogonal zu $\partial\Omega$ für fast alle x. (Betrachte glatte Kurve $\gamma \subset \partial\Omega$ durch $x \in \partial\Omega$: $u(\gamma(t)) = 0$. Differenzieren nach t liefert $\nabla u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$). Auf $\partial\Omega$ gilt also $\nabla u = \pm\,\nu|\nabla u|$. Damit folgt (auf $\partial\Omega$):

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu(x) = \pm|\nu|^2|\nabla u| = \pm\,|\nabla u| \quad \text{sowie} \quad \nabla u \cdot x = \pm|\nabla u| x \cdot \nu$$

Einsetzen in $(***)$ ergibt schließlich:

$$n\lambda \int_\Omega |u|^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 (x\cdot\nu)\,d\sigma.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung folgt sofort: Ist u auch eine Lösung von (2) (wobei die λ's in (1) und (2) verschieden sein dürfen) so gilt:

$$n\lambda \int_\Omega |u|^2\,dx = 0.$$

Es muss also entweder $\lambda = 0$ oder $u \equiv 0$ gelten. Da $\lambda = 0$ ebenfalls $u \equiv 0$ in Ω impliziert, ist die Beh. bewiesen.

b) Verwende den Separationsansatz $u(x,y) = f(x)g(y)$. Dann folgt $-\Delta u = -(f''(x)g(y) + f(x)g''(y)) \stackrel{!}{=} \lambda f(x)y(y)$. Dividieren durch $f(x)g(y)$ liefert

$$\begin{aligned}
&-\frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda + \frac{g''(y)}{g(y)}\\
\Rightarrow &-\frac{f''(x)}{f(x)} = c_1, \quad -\frac{g''(y)}{g(y)} = c_2, \quad c_1 + c_2 = \lambda\\
\Rightarrow & f''(x) + c_1 f(x) = 0, \quad g''(y) + c_2 g(y) = 0, \quad c_1 + c_2 = \lambda.
\end{aligned}$$

In Abhängigkeit von c_1 erhalten wir die folgenden allg. Lösungen (analog für c_2 und g):

$$\begin{aligned}
c_1 < 0: \quad f(x) &= \alpha e^{-\sqrt{-c_1}x} + \beta e^{-\sqrt{c_1}x}\\
c_1 = 0: \quad f(x) &= \alpha x + \beta\\
c_1 > 0: \quad f(x) &= \alpha \sin(\sqrt{c_1}x) + \beta\cos(\sqrt{c_1}x)
\end{aligned}$$

Problem (1) erfordert Randbedingungen $u = 0$, was $f(0) = f(1) = g(0) = g(1)$ impliziert. Einsetzen in die allg. Lösung ergibt $c_1, c_2 > 0$ und weiter

$$\begin{aligned}
f(x) &= \alpha\sin(k\pi x), \quad c_1 = k^2\pi^2 \quad (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})\\
g(y) &= \beta\sin(l\pi y), \quad c_2 = l^2\pi^2 \quad (\beta \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

Da $\{\sin(k\pi x)\sin(l\pi y),\ k,l \in \mathbb{N}\}$ dicht in $L^2((0,1)^2)$ ist, sind dies alle Eigenfunktionen.

Die Randbedingungen zu Problem (2) ergeben $f'(0) = f'(1) = g'(0) = g'(1) = 0$. Es folgt $c_2 \geq 0$ und einsetzen in die allg. Lösung ergibt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \alpha\cos(k\pi x), \quad c_1 = k^2\pi^2 \quad (\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0)\\
g(y) &= \beta\cos(l\pi y), \quad c_2 = l^2\pi^2 \quad (\beta \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{N}_0)
\end{aligned}$$

Da $\{\cos(k\pi x)\cos(l\pi y),\ k,l \in \mathbb{N}_0\}$ dicht in $L^2((0,1)^2)$ ist, sind dies alle Eigenfunktionen.

Aufgabe 26

Bemerkung: Im folgenden heißen alle vorkommenden Konstanten C, auch wenn der Wert der Konstante von Schritt zu Schritt variiert. Gleiches gilt für vorkommende ε.
Wir beweisen zunächst noch die folgende Identität für Differenzenquotienten. Sei $V \subset\subset \Omega$ und $u, v \in H_0^1(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} v \in V$. Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h|$ genügend klein ($|h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$) und $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$-\int_\Omega v(D_k^{-h} w)\,dx = \int_\Omega (D_k^h v) w\,dx. \tag{1}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega v D_k^{-h} w\,dx &= -\int_\Omega v(x)\frac{w(x-he_k)-w(x)}{-h}\,dx \\
&= \int_\Omega \frac{1}{h} v(x) w(x-he_k)\,dx - \int_\Omega \frac{1}{h} v(x)w(x)\,dx \\
&= \int_\Omega \frac{1}{h} v(x+he_k) w(x)\,dx - \int_\Omega \frac{1}{h} v(x)w(x)\,dx \\
&= \int_\Omega \frac{v(x+he_k)-v(x)}{h} w(x)\,dx = \int_\Omega D_k^h v w\,dx.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 1: Zu $V \subset\subset \Omega$ offen wähle eine offene Menge W mit $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$. Weiter sei ζ eine glatte Funktion mit den Eigenschaften $\zeta \equiv 1$ in V, $\zeta \equiv 0$ in $\mathbb{R}^n \backslash W$ und $0 \le \zeta \le 1$.
Da u eine schwache Lösung von $Lu = f$ ist, gilt für alle $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega (f - cu) v\,dx. \tag{2}$$

Sei nun $|h| > 0$ klein und $k \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Wähle $v := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u) \in H_0^1(\Omega)$ und setze in (2) ein. Mit

$$A := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\left(-D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right)\,dx \quad \text{und} \quad B := \int_\Omega (f-cu) D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right)\,dx$$

führt dies auf die Gleichung

$$A = B. \tag{3}$$

Wir formen zunächst A um. Im ersten Schritt verwenden wir, dass $\left(D_k^h u\right)_{x_i} = D_k^h u_{x_i}$ für alle $h \in \mathbb{R}$, $i, k \in \{1, \dots, n\}$ gilt ($u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$).

$$\begin{aligned}
A &= -\sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}\left(D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right)_{x_i}\,dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i} D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right)_{x_i}\,dx \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(D_k^h u_{x_i}\right)\left(\zeta^2 D_k^h u\right)_{x_i}\,dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(D_k^h u_{x_i}\right)\left[2\zeta\zeta_{x_i} D_k^h u + \left(D_k^h u_{x_i}\right)\zeta^2\right]\,dx \\
&= \int_\Omega \zeta^2\left|D_k^h \nabla u\right|^2\,dx + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_\Omega 2\zeta\zeta_{x_i}(D_k^h u)\left(D_k^h u_{x_i}\right)\,dx}_{=:A_2}
\end{aligned}$$

$|A_2|$ kann mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Youngschen Ungleichung abgeschätzt werden ($C = C(\zeta_{x_1}, \ldots, \zeta_{x_n})!$):

$$\begin{aligned}
|A_2| &\leq C \int_\Omega \zeta |D_k^h \nabla u||D_k^h u| \, dx \overset{\operatorname{supp}\zeta \subset W}{=} \int_W \zeta |D_k^h \nabla u||D_k^h u| \, dx \\
&\leq \varepsilon \int_W \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_W |D_k^h u|^2 \, dx \\
&\overset{\text{Satz 2 (i)}}{\leq} \varepsilon \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx
\end{aligned}$$

Wählen wir nun $\varepsilon = \frac{1}{2}$, so erhalten wir für A die folgende Abschätzung:

$$A \geq \frac{1}{2} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx - C \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Um eine Abschätzung für B zu erhalten, schätzen wir zunächst $\int_\Omega |v|^2 \, dx$ mit Hilfe von Satz 2 (i) ab. Hierbei ist $W \subset\subset \tilde{W} \subset\subset \Omega$ mit $\operatorname{supp} D_k^{-h} \left(\zeta^2 D_k^h u\right) \subset \tilde{W}$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v|^2 \, dx &= \int_{\tilde{W}} \left| D_k^{-h} \left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right|^2 \, dx \\
&\leq C \int_\Omega \left| \nabla \left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right|^2 \, dx = \int_W \left| \nabla \left(\zeta^2 D_k^h u\right)\right|^2 \, dx \\
&\leq C \int_W |\nabla(\zeta^2)|^2 |D_k^h u|^2 + \zeta^4 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx \\
&\overset{\zeta^2 \leq 1}{\leq} \underbrace{C}_{=C(\nabla\zeta)} \int_W |D_k^h u|^2 + \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx \\
&\leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 + \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Es folgt nun:

$$\begin{aligned}
|B| &\leq C \int_\Omega (|f| + |u|)|v| \, dx \\
&\leq \tilde{\varepsilon} \int_\Omega |v|^2 \, dx + \frac{C}{\tilde{\varepsilon}} \int_\Omega (|f| + |u|)^2 \, dx \\
&\leq \varepsilon \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \; + \frac{C}{\varepsilon} \int_\Omega f^2 + u^2 \, dx + \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon = \frac{1}{4}$ erhalten wir

$$|B| \leq \frac{1}{4} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx + C \int_\Omega (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2) \, dx$$

Wegen $A = B \leq |B|$ folgt nun aus den Abschätzungen für A und B:

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx - C \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{1}{4} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx + C \int_\Omega (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2) \, dx$$

und weiter ($\zeta \equiv 1$ in V):

$$\int_V |D_k^h \nabla u|^2 \, dx \leq \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2 \, dx \leq C \int_\Omega f^2 + u^2 + |\nabla u|^2 \, dx = C \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \right)$$

Mit Satz 2 (ii) folgt nun $\nabla u \in H^1(V;\mathbb{R}^n)$ und somit $u \in H^2(V)$ mit der Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}\right).$$

Das gleiche Argument liefert ebenso

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(W)} + \|u\|_{H^1(W)}\right) \tag{4}$$

wobei C nun von V, W und einer geeigneten Abschneidefunktion $\tilde{\zeta}$ abhängt. Sei nun ζ_2 eine weitere Abschneidefunktion mit $\zeta_2 \equiv 1$ in W, $\operatorname{supp} \zeta_2 \subset \Omega$ und $0 \leq \zeta_2 \leq 1$. Setze $v_2 = \zeta_2^2 u$ in die schwache Formulierung ein. Wir erhalten:

$$\int_\Omega 2\zeta_2 u \nabla u \cdot \nabla \zeta_2 + \zeta_2^2 |\nabla u|^2 \, dx = \int_\Omega f u \zeta_2^2 - \zeta_2^2 u^2 \, dx.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}\int_\Omega \zeta_2^2 |\nabla u|^2 &\leq \int_\Omega |fu|\zeta_2^2 + \zeta_2^2 u^2 + 2\zeta_2 |u||\nabla \zeta_2||\nabla u| \, dx \\ &\overset{0\leq\zeta_2\leq 1}{\leq} C\int_\Omega u^2 + f^2 + u^2 + \varepsilon \zeta_2^2 |\nabla u|^2 + \frac{C}{\varepsilon}|u|^2 |\nabla \zeta_2|^2 \, dx\end{aligned}$$

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt:

$$\underbrace{\int_W |\nabla u|^2 \, dx + \int_W u^2 \, dx}_{=\|u\|_{H^1(W)}} \leq \int_\Omega \zeta^2 |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega u^2 \, dx \leq C\int_\Omega f^2 + u^2 \, dx = C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

Einsetzen in (4) ergibt schließlich:

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$