Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
9. Übungsblatt

Aufgabe 27

Es seien X, Y Banachräume. Die Räume beschränkter bzw. kompakter linearer Operatoren von X nach Y seien mit $\mathcal{B}(X,Y)$ bzw. $\mathcal{K}(X,Y)$ bezeichnet und mit der üblichen Operatornorm

$$\|A\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}, \;\; A \in \mathcal{B}(X,Y) \text{ bzw. } A \in \mathcal{K}(X,Y)$$

versehen. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{B}(X,Y)$ ist ein Banachraum.

b) $\mathcal{K}(X,Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum vom $\mathcal{B}(X,Y)$.

Aufgabe 28

Es sei $k \in L^2((0,1) \times (0,1))$. Zeigen Sie, dass der Operator

$$K : L^2((0,1)) \to L^2((0,1)), \quad u \mapsto (Ku)(x) := \int_0^1 k(x,y)u(y)\,dy \quad (x \in (0,1))$$

kompakt ist.
Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass k in $L^2((0,1) \times (0,1))$ durch Treppenfunktionen k_N von der Form

$$k_N(x,y) = \sum_{i,j=1}^{N} \gamma_{ij}\chi_{A_i}(x)\chi_{B_j}(y)$$

mit $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ und messbaren Mengen $A_i, B_j \subset (0,1)$ approximiert werden kann. Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$K_N : L^2((0,1)) \to L^2((0,1)), \quad u \mapsto (K_N u)(x) := \int_0^1 k_N(x,y)u(y)\,dy \quad (x \in (0,1))$$

kompakt sind und verwenden Sie Aufgabe 27.

Bitte wenden!

Aufgabe 29

Es sei H ein unendlich-dimensionaler Prähilbertraum und $A : D(A) \to H$ ein linearer und symmetrischer Operator. Weiter sei $D(A)$ dicht in H und H besitze eine Orthonormalbasis aus Eigenelementen $u_n \in D(A)$ von A. Die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Eigenwerte erfülle $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ und konvergiere gegen $+\infty$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lambda_n = \min_{\substack{U\subset D(A)\\ \text{Unterraum,}\\ \dim(U)=n}} \max_{u\in U, u\neq 0} \frac{\langle Au, u\rangle}{\langle u, u\rangle} \qquad \text{(min-max-Prinzip von Poincaré).}$$

Aufgabe 30

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $D(A) = D(B) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Weiter seien $Au := -\Delta u$ und $Bu = -\Delta u + cu$ mit einer reellwertigen Funktion $c \in L^\infty(\Omega)$. Die Eigenwerte λ_i von A und μ_i von B seien geordnet: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ und $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots$.
Zeigen Sie: $\lambda_i + \underline{c} \leq \mu_i \leq \lambda_i + \overline{c}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, wobei $\underline{c}$, $\overline{c} \in \mathbb{R}$ mit $\underline{c} \leq c \leq \overline{c}$ fast überall in Ω.
Hinweis: Aufgabe 29

Besprechung in der Übung am 19.6.2013