Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.-Math. Dagmar Roth

Rand- und Eigenwertprobleme
Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 27

a) Wir zeigen zunächst, dass $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum ist:

(i) $\|A\| \geq 0$ klar; $0 = \|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \Rightarrow \|Ax\|_Y = 0$ für alle $x \in X \Rightarrow Ax = 0$ für alle $x \in X \Rightarrow A = 0$.

(ii) $\|\lambda A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_Y}{\|x\|_X} = |\lambda| \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = |\lambda|\|A\|$.

(iii) $\|A+B\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y+\|Bx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} + \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_Y}{\|x\|_X} = \|A\| + \|B\|$.

Zeige nun, dass $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|)$ vollständig ist: Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(X,Y)$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n,m \geq n_0 : \underbrace{\|A_n - A_m\|}_{=\sup\limits_{x\in X} \frac{\|A_n x - A_m x\|_Y}{\|x\|_X}} < \varepsilon.$$

Somit folgt für alle $x \in X$ und $n,m \geq n_0$: $\frac{\|A_n x - A_m x\|_Y}{\|x\|_X} < \varepsilon$.

Für jedes $x \in X$ ist somit $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y. Da Y vollständig ist, existiert für alle $x \in X$ ein Element $y_x \in Y$ mit $A_n x \to y_x$ $(n \to \infty)$. Definiere nun den Operator $A : X \to Y$, $Ax = y_x = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$.

(i) A ist linear: $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim\limits_{n\to\infty}(A_n(\alpha x_1 + \beta x_2)) = \alpha A x_1 + \beta A x_2$.

(ii) A ist beschränkt: Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $x \in X$ und $n,m \geq n_0$ gilt: $\|A_n x - A_m x\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X$. Für $m \to \infty$ folgt: $\|A_n x - Ax\|_X \leq \varepsilon\|x\|_X$. Dies liefert

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax - A_n x\|_Y + \|A_n x\|_Y}{\|x\|_X} \leq \varepsilon + \|A_n\|$$

Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, ist $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und die Beschränktheit von A folgt.

Zeige nun: $\|A_n - A\| \to 0$ in $\mathcal{B}(X,Y)$. Sei $\varepsilon > 0$. Wie eben folgt für alle $x \in X$ und $n \geq n_0$: $\|A_n x - Ax\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_X$ und somit $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|A_n x - Ax\|_Y}{\|x\|_X} = 0$.

b) Zeige zunächst $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$. Sei $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt. Da A kompakt, besitzt $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Angenommen, A ist nicht beschränkt. Dann ex. Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|x_n\|_X = 1$ und $\|Ax_n\|_Y \to \infty$ $(n \to \infty) \Rightarrow$ $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keine konvergente Teilfolge. $\lightning$

Beweis der Abgeschlossenheit von $\mathcal{K}(X,Y)$:
Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ eine konvergente Folge. Aus Teil a) folgt: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen linearen und beschränkten Operator A. Wir zeigen: $A \in \mathcal{K}(X,Y)$. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine beliebige beschränkte Folge. Da A_1 kompakt, besitzt $(A_1x_n)_{n\in N}$ eine konvergente Teilfolge, die wir mit $(A_1x_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen ($\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ monoton wachsend). Analog besitzt $(A_2x_{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(A_2x_{\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ u.s.w. Allgemein erhalten wir: $(A_kx_{\varphi_{k-1}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(A_kx_{\varphi_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$; $(\varphi_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(\varphi_{k-1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $k\in\mathbb{N}$.

Definiere nun $z_i = x_{\varphi_i(i)},\ i\in\mathbb{N}$. Nach Konstruktion konvergiert $(A_kz_i)_{i\in\mathbb{N}}$ für alle $k\in\mathbb{N}$ und $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt ($\|z_i\|_X \le M$). Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\|Az_i - Az_j\|_Y &\le \|Az_i - A_nz_i\|_Y + \|A_nz_i - A_nz_j\|_Y + \|A_nz_j - Az_j\|_Y \\
&\le \|A-A_n\|\|z_i\|_X + \|A_nz_i - A_nz_j\|_Y + \|A-A_n\|\|z_j\|_X \\
&\le 2M\|A-A_n\| + \|A_nz_i - A_nz_j\|_Y
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0\in\mathbb{N}$ so, dass $\|A-A_n\| < \frac{\varepsilon}{4M}$ gilt für alle $n \ge n_0$. Wähle nun $n_1 \in \mathbb{N}$ ($n_1 > n_0$) so, dass $\|A_{n_0}z_i - A_{n_0}z_j\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt für alle $i,j \ge n_1$. Dann folgt für alle $i,j \ge n_1$:

$$\|Az_i - Az_j\| < \varepsilon,$$

also ist $(Az_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergent und A kompakt.

Bemerkung: Es wurde nur die Vollständigkeit von Y benutzt.

Aufgabe 28

Im Folgenden sei $\Omega = (0,1)$. Sei $k_N : \Omega\times\Omega \to \mathbb{R},\ k_N(x,y) = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \gamma_{ij}\chi_{A_i}(x)\chi_{B_j}(y)$ mit $\gamma_{ij}\in\mathbb{R}$ und $A_i, B_j \subset \Omega$. Die Folge $(k_N)_{N\in\mathbb{N}}$ approximiere k in $L^2(\Omega\times\Omega)$, d.h. es gilt:

$$\|k_N - k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} \to 0 \quad (N\to\infty).$$

Sei $K_N : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, $(K_Nu)(x) = \int_0^1 k_N(x,y)u(y)\,dy$. K_N ist beschränkt:

$$\begin{aligned}
\|K_Nu\|_2^2 = \int_0^1 |(K_Nu)(x)|^2\,dx &= \int_0^1 \left|\int_0^1 k_N(x,y)u(y)\,dy\right|^2 dx \\
&\le \int_0^1 \left(\int_0^1 |k_N(x,y)||u(y)|\,dy\right)^2 dx \\
&\overset{\text{CSU}}{\le} \int_0^1 \left(\int_0^1 |k_N(x,y)|^2\,dy\right)\left(\int_0^1 |u(y)|^2\,dy\right) dx = \|k_N\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)}\|u\|_2^2 \\
\Rightarrow \|K_N\| = \sup_{x\ne 0}\frac{\|K_Nu\|_2}{\|u\|_2} &\le \|k_N\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}
\end{aligned}$$

Wegen $(K_Nu)(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \underbrace{\gamma_{ij}\int_{B_j} u(y)\,dy}_{=\text{const}}\,\chi_{A_i}(x)$ folgt $K_Nu \in \operatorname{span}\{\chi_{A_1},\dots,\chi_{A_N}\}$, d.h. $\dim(\text{Bild}(K_N)) = N < \infty$. Mit Aufgabe 24 e) folgt, dass K_N kompakt ist.
Wie im Nachweis der Beschränktheit von K_N folgt nun aufgrund der Approximationseigenschaft von k_N:

$$\|K_N - K\| \le \|k_N - k\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} \to 0 \quad (N\to\infty).$$

Aufgabe 27 zeigt nun, dass K als Grenzwert beschränkter und kompakter linearer Operatoren auch beschränkt, kompakt und linear ist.

Aufgabe 29

Es sei $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ eine ONB aus Eigenfunktionen (ex. nach Vor.), d.h. $Au_n = \lambda_n u_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$.

"$\leq$": Es sei $U \subset D(A)$, $U = \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig. Sei $u_0 \in U\backslash\{0\}$ so, dass $\langle u_0, u_i \rangle = 0$ gilt für $i = 1, \dots, n-1$ (Wegen $u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ ist dies äquivalent zu $\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle \varphi_i, u_j \rangle = 0$, $(j = 1, \dots, n-1) \rightsquigarrow$ LGS)

Da $\{u_i, i \in \mathbb{N}\}$ eine ONB ist, gilt $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^\infty \langle u, u_i \rangle \overline{\langle v, u_i \rangle}$ für alle $u, v \in D(A)$ und es folgt:

$$
\begin{aligned}
\max_{u \in U\backslash\{0\}} \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle} &\geq \frac{\langle Au_0, u_0 \rangle}{\langle u_0, u_0 \rangle} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle Au_0, u_i \rangle \overline{\langle u_0, u_i \rangle}}{\langle u_0, u_0 \rangle} \\
&\overset{A \text{ symm.}}{=} \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \langle u_0, Au_i \rangle \overline{\langle u_0, u_i \rangle}}{\langle u_0, u_0 \rangle} = \frac{\sum\limits_{i=n}^{\infty} \lambda_i \langle u_0, u_i \rangle \overline{\langle u_0, u_i \rangle}}{\langle u_0, u_0 \rangle} \\
&\geq \lambda_n \frac{\sum\limits_{i=n}^{\infty} |\langle u_0, u_i \rangle|^2}{\langle u_0, u_0 \rangle} = \lambda_n \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\langle u_0, u_i \rangle|^2}{\langle u_0, u_0 \rangle} = \lambda_n
\end{aligned}
$$

Da $U \subset D(A)$ mit $\dim U = n$ beliebig, folgt

$$
\inf_{\substack{U \subset D(A) \\ \dim(U) = n}} \max_{u \in U\backslash\{0\}} \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \geq \lambda_n.
$$

"$\geq$": Sei $U = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$. Für alle $u \in U$ gilt:

$$
\langle Au, u \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i A u_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \right\rangle \overset{\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}}{=} \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i
$$

Wegen $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ folgt

$$
\max_{u \in U} \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \max_{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}} \frac{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2} \leq \max\{\lambda_1 \dots, \lambda_n\} = \lambda_n
$$

und insbesondere:

$$
\inf_{\substack{U \subset D(A) \\ \dim(U) = n}} \max_{u \in U\backslash\{0\}} \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \leq \lambda_n.
$$

Mit dem ersten Teil folgt die Gleichheit für das Infimum. Da für $u = u_n \in U = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ gilt $\frac{\langle Au_n, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle} = \lambda_n$, wird das Infimum angenommen (und ist daher ein Minimum) und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 30

Wir verwenden das min-max-Prinzip von Poincaré:

$$
\begin{aligned}
\mu_i &= \min_{\substack{U \subset D(B) \\ \dim(U) = i}} \max_{u \in U\backslash\{0\}} \frac{\langle Bu, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \min_{\substack{U \subset D(B) \\ \dim(U) = i}} \max_{u \in U\backslash\{0\}} \frac{\int_\Omega (-\Delta u) u + c(x) u^2 \, dx}{\langle u, u \rangle} \\
&\leq \min_{\substack{U \subset D(B) \\ \dim(U) = i}} \max_{u \in U\backslash\{0\}} \frac{\int_\Omega (-\Delta u) u \, dx + \overline{c} \langle u, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \min_{\substack{U \subset D(A) \\ \dim(U) = i}} \max_{u \in U\backslash\{0\}} \frac{\int_\Omega (-\Delta u) u \, dx}{\langle u, u \rangle} + \overline{c} = \lambda_i + \overline{c}.
\end{aligned}
$$

Analog ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mu_i &= \min_{\substack{U \subset D(B) \\ \dim(U)=i}} \max_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{\langle Bu, u\rangle}{\langle u, u\rangle} = \min_{\substack{U \subset D(B) \\ \dim(U)=i}} \max_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega (-\Delta u)u + c(x)u^2 \, dx}{\langle u, u\rangle} \\
&\geq \min_{\substack{U \subset D(B) \\ \dim(U)=i}} \max_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega (-\Delta u)u \, dx + \underline{c}\langle u, u\rangle}{\langle u, u\rangle} = \min_{\substack{U \subset D(A) \\ \dim(U)=i}} \max_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega (-\Delta u)u \, dx}{\langle u, u\rangle} + \underline{c} = \lambda_i + \underline{c}.
\end{aligned}$$