Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Spektraltheorie von Differentialoperatoren
Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine surjektive stetige Funktion. Betrachte den Operator M_ϕ auf $L^2(\mathbb{R})$ mit Definitionsbereich

$$D(M_\phi) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \phi f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

definiert durch $M_\phi(f) := \phi f$. Zeigen Sie, dass M_ϕ abgeschlossen ist und berechnen Sie das Spektrum von M_ϕ.

Aufgabe 2

Es sei $D(T) := C_c^\infty(\mathbb{R})$.

$$T :\; D(T) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),\; f \to i\frac{df}{dx}$$

Begründen sie kurz, warum T abschließbar ist und geben Sie den Abschluss an. Vergleichen Sie anschließend die Spektren von T und von $\overline{T}$. Haben T oder $\overline{T}$ Eigenwerte?

Aufgabe 3

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet. Beweisen Sie die a priori-Abschätzung

$$\|w\|_{H^2} \leq \|\Delta w\|_{L^2} + \|w\|_{L^2} \qquad (v \in H_0^2(\Omega)),$$

wobei

$$\|w\|_{H^2}^2 := \int_\Omega \left(|w|^2 + |\nabla w|^2 + \sum_{i,j=1}^d \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 \right) dx.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Ungleichung zunächst für $C_c^\infty(\Omega)$. Für $w \in C_c^\infty(\Omega)$ betrachten Sie $\int_\Omega \Delta w \Delta \overline{w}\, dx$ und integrieren Sie partiell.