Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Spektraltheorie von Differentialoperatoren
Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Betrachten Sie für festes $q > 0$ den Matthieu-Operator

$$T:\ H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),\ Tu(x) = -u''(x) + 2q\cos(x)u(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass es keine Überlappung der spektralen Bänder gibt. Das heißt, weder das periodische noch das antiperiodische Problem auf $(0, 2\pi)$ hat doppelten Eigenwerte. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Angenommen λ ist ein doppelter Eigenwert des periodischen bzw. antiperiodischen Problems. Zeigen Sie, dass es zwei linear unabhängige Lösungen $\psi, \phi \in L^2(0, 2\pi)$ gibt, sodass ϕ symmetrisch und ψ antisymmetrisch bezüglich Spiegelung an π ist.

b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ das vollständige Orthonormalsystem von $L^2(0, 2\pi)$, welches durch

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

gegeben ist. Sei $a_n := \langle \phi, f_n\rangle$ und $b_n := \langle \psi, f_n\rangle$ für $n \in \mathbb{Z}$. Verwenden Sie die Eigenwertgleichung, um eine Rekursionsformel für (a_n) und (b_n) zu finden.

c) Kombinieren Sie a) und b), um die Behauptung zu folgern.

Aufgabe 2

Sei $T:\ D(T) \subset H \to H$ ein selbstadjungierter, nach unten halbbeschränkter Operator.

a) Zeigen Sie, dass dann T mit seiner Friedrichs-Erweiterung übereinstimmt.

b) Ein Unterraum $C \subset D(T)$ heißt Core von T, falls C dicht ist bezüglich der Graphnorm auf $D(T)$, das heißt, für jedes $u \in D(T)$ gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $v \in C$ mit $\|u-v\|_H + \|Tu-Tv\|_H < \varepsilon$. Ensprechend sei $a:\ D(a) \times D(a) \to \mathbb{C}$ eine abgeschlossene, symmetrische, positiv definite Bilinearform. Ein Unterraum $C \subset D(a)$ heißt Core von a, falls C dicht ist bezüglich $\|\cdot\|_a$. Beweisen Sie:
Falls C ein Core von T ist, so ist C ein Core der zugehörigen (mit entsprechendem Shift) abgeschlossenen Bilinearform a.

Aufgabe 3

Seien a, b reelle Zahlen und $T_0, T_{a,b}$ und $T_{\infty,\infty}$ definiert durch:

$$\begin{aligned}
D(T_0) &:= H_0^2(0,1) \\
D(T_{a,b}) &:= \{u \in H^2(0,1):\ a\,u(0) + u'(0) = 0 = b\,u(1) + u'(1)\} \\
D(T_{\infty,\infty}) &:= \{u \in H^2(0,1):\ u(0) = u(1) = 0\}
\end{aligned}$$

Ferner sei die Wirkung aller dieser Operatoren durch $u \mapsto -u''$ für u im entsprechenden Definitionsbereich erklärt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $T_{a,b}$ und $T_{\infty,\infty}$ sind paarweise verschiedene selbstadjungierte, nach unten halbbeschränkte Erweiterungen von T_0.

b) Sei $t_{a,b}$ bzw. $t_{\infty,\infty}$ die abgeschlossene symmetrische positive Bilinearform zu $T_{a,b}$ bzw. $T_{\infty,\infty}$. Zeigen Sie, dass $D(t_{a,b}) \supset D(t_{\infty,\infty})$ und $t_{a,b}(u,v) = t_{\infty,\infty}(u,v)$ für alle $u, v \in D(t_{\infty,\infty})$.