**Karlsruher Institut für Technologie**
**Institut für Analysis**
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

# Spektraltheorie von Differentialoperatoren
# Übungsblatt 11

## Aufgabe 1

Sei $T: D(T) \subset H \to H$ ein selbstadjungierter, nach unten halbbeschränkter Operator. Die quadratischen Formen $a_0: D(T) \times D(T) \to \mathbb{C}$, $a: D(a) \times D(a) \to \mathbb{C}$ sowie die Konstanten $\gamma_0, \gamma$ seien wie in der Vorlesung erklärt. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Die quadratische Form $Q: D((T+\gamma)^{1/2}) \times D((T+\gamma)^{1/2}) \to \mathbb{C}$ ist eine Erweiterung von $a_0$. Dabei ist $D((T+\gamma)^{1/2})$ gemäß Spektralsatz erklärt: Ist $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die zu $T$ gehörige Spektralschar, so sei $D((T+\gamma)^{1/2}) := \{u \in H : \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\lambda+\gamma}^2 \, d\|E_\lambda u\|^2 < \infty\}$

b) Die Abbildung

$$\overline{Q} :,\ H \to [0,\infty],\ \overline{Q}(u) = \begin{cases} Q(u,u), & u \in D((T+\gamma)^{1/2}) \\ \infty, & u \notin D((T+\gamma)^{1/2}). \end{cases}$$

ist unterhalbstetig, das heißt, für jede Folge $(u_n)$ in $H$ mit $u_n \to u$ für $n \to \infty$ und ein $u \in H$ gilt: $\overline{Q}(u) \le \liminf_{n\to\infty} \overline{Q}(u_n)$.

c) Folgern Sie aus der Unterhalbstetigkeit von $\overline{Q}$, dass $D(Q)$ abgeschlossen bzgl $\|\cdot\|_Q$ ist.

d) Folgern Sie $a = Q$.

## Aufgabe 2

Sei $T: D(T) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ ein selbstadjungierter Operator mit folgenden Eigenschaften

1 Für jedes beschränkte $B \subset \mathbb{R}^d$ gilt: $\chi_B(T-z)^{-1}$ ist kompakt für ein (und damit für alle) $z \in \rho(T)$. Dabei bezeichnet $\chi_B$ die charakteristische Funktion von $B$ und gleichzeitig den Multiplikationsoperator mit $\chi_B$ (als Operator von $L^2(\mathbb{R}^d)$ in sich).

2 Für ein $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\phi(x) = 0$ für $|x| \ge 2$ und $\phi(x) = 1$ für $|x| \le 1$, sowie $\phi \ge 0$ und $\phi_n(x) := \phi(x/n)$ gilt:

$$\|(T\phi_n - \phi_n T)(T-i)^{-1}\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(Wieder wird die Funktion $\phi_n$ mit dem zugehörigen Multiplikationsoperator identifiziert.)

Eine Zhislin-Folge für $T$ zum Wert $\lambda$ ist eine Folge $(u_n)$ in $D(T)$ mit $\|u_n\| = 1$, $u(x) = 0$ für $|x| \le n$ und $\|(T-\lambda)u_n\| \to 0$. In dieser Aufgabe soll bewiesen werden:

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{ es gibt eine Zhislin-Folge für } T \text{ zum Wert } \lambda\}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Zeigen Sie zunächst “ $\supset$″.

b) Sei $\lambda \in \sigma_c(T)$ und $(u_n)$ eine Weyl-Folge zu $\lambda$, das heißt, $\|u_n\| = 1$, $u_n \rightharpoonup 0$ und $\|(T-\lambda)u_n\| \to 0$. (Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass gilt: $\lambda \in \sigma_c(T)$ genau dann, wenn es eine Weyl-Folge zu $\lambda$ gibt.) Zeigen Sie: $(T-i)u_n \rightharpoonup 0$. Folgern Sie mit Eigenschaft 1, dass $\phi_n u_m \to 0$ für $m \to \infty$ bei festem $n$ und damit $\|(1-\phi_n)u_m\| \to 1$ $(m \to \infty)$.

c) Verwenden Sie die Eigenschaft 2 um zu zeigen, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|(T-\lambda)(1-\phi_n)u_m\| \leq \|(T-\lambda)u_m\| \qquad (m \in \mathbb{N})$$

Ferner ist der Grenzwert gleichmäßig in $m$.

d) Folgern Sie aus b) und c), dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen $n(k), m(k)$ existieren, sodass $n(k), m(k) \to \infty$ für $(k \to \infty)$ und es gilt:

$$\|(1-\phi_{n(k)})u_{m(k)}\| \geq 1 - k^{-1},$$

$$\|(T-\lambda)(1-\phi_{n(k)})u_{m(k)}\| \leq k^{-1}.$$

Dann ist $v_k := \frac{(1-\phi_{n(k)})u_{m(k)}}{\|(1-\phi_{n(k)})u_{m(k)}\|}$ eine Zhislin-Folge für $T$ zum Wert $\lambda$.

## Aufgabe 3

Sei $T$ die Friedrichserweiterung von $T_0 : D(T_0) := C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subset L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$, $T_0 u = -\Delta u + Vu$ mit $V \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^3)$ und $V(x) \to +\infty$ für $\|x\| \to \infty$. $T$ ist nach unten halbbeschränkt.

a) Zeigen Sie, dass $T$ die erste Eigenschaft aus Aufgabe 2 erfüllt, indem Sie zeigen, dass $-\Delta$ die Eigenschaft 1 erfüllt, anschließend folgern, dass $(-\Delta)^{1/2}$ (wie in Aufgabe 1 definiert) Eigenschaft 1 erfüllt, und ausnutzen, dass $(-\Delta+1)^{1/2}(T+\gamma)^{-1/2}$ beschränkt ist.

b) Zeigen Sie, dass $T$ auch die zweite Eigenschaft aus Aufgabe 2 erfüllt.

c) Folgern Sie, dass $\sigma(T)$ diskret ist.