Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Spektraltheorie von Differentialoperatoren
Übungsblatt 12

In Aufgabe 1 - 3 sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung eingeführte normierte Raum $(H^{1/2}(\partial\Omega), \|\cdot\|_{\frac{1}{2},\Omega})$, definiert durch

$$\begin{aligned} H^{1/2}(\partial\Omega) &:= \{u|_{\partial\Omega} :\ u \in H^1(\Omega)\} \\ \|\phi\|_{\frac{1}{2},\Omega} &:= \inf\{\|u\|_{H^1(\Omega)} :\ u \in H^1(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = \phi\}, \end{aligned}$$

ein Banachraum ist.

Aufgabe 2

Setzen Sie (ohne Beweis) voraus, dass ein Lipschitz-stetiges Vektorfeld $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ existiert, sodass $f(x) \cdot \nu(x) \geq 1$ für fast alle $x \in \partial\Omega$ gilt. Dabei ist ν das nach außen zeigende Normalenvektorfeld. Zeigen Sie, dass für jedes $\delta > 0$ ein $C(\delta) > 0$ exisitert, sodass gilt:

$$\int_{\partial\Omega} |u|^2 d\sigma \leq \delta \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\delta)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1(\Omega)$$

Aufgabe 3

Es sei $\mu \in L^\infty(\partial\Omega)$. Die Bilinearform b_μ sei gegeben durch

$$b_\mu :\ H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{C},\ b_\mu(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \overline{v}\, dx - \int_{\partial\Omega} \mu u \overline{v}\, d\sigma.$$

a) Zeigen Sie, dass es Konstanten $\gamma, c, C > 0$ gibt, sodass für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$c\|u\|^2_{H^1} \leq b_\mu(u,u) + \gamma\langle u, u\rangle^2_{L^2} \leq C\|u\|^2_{H^1}.$$

Definieren Sie auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^d)$ anschließend die positiv definite Bilinearform a_μ durch $D(a_\mu) = H^1(\Omega)$,

$$a_\mu : D(a_\mu) \times D(a_\mu) \to \mathbb{C},\ a_\mu(u,v) := b_\mu(u,v) + \gamma\langle u, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

$\|\cdot\|_{a_\mu}$ ist also äquivalent zu $\|\cdot\|_{H^1}$.

b) Zeigen Sie, dass der selbstadjungierte Operator T, der durch Konstruktion der Friedrichserweiterung aus der Bilinearform a_μ entsteht, gegeben ist durch

$$\begin{aligned} D(T) &:= \{u \in H^{1,\Delta}(\Omega) :\ \partial_\nu u = \mu u|_{\partial\Omega}\} \\ Tu &:= -\Delta u + \gamma u \qquad \forall u \in D(T). \end{aligned}$$

Ein anschließender spektraler Shift des Operators um $-\gamma$ führt zu dem Laplace-Operator mit Robinschen Randbedingungen mit zugehörgier abgeschlossenen Bilinearform b_μ.

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe soll das Spektrum des Harmonischen Oszillators berechnet werden. Sei $T : D(T) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d), Tu := -\Delta u + |x|^2 u$ mit

$$D(T) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^d) : \ -\Delta u + |x|^2 u \in L^2(\mathbb{R}^d), \ \sqrt{1 + |x|^2} u \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Hierbei bezeichnet $|x|^2$ gleichzeitig die Funktion $x \mapsto |x|^2$ und den Multiplikationsoperator mit dieser Funktion. Begründen Sie kurz, dass T die Friedrichserweiterung von

$$\tilde{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d), \ \tilde{T}u := -\Delta u + |x|^2 u$$

ist. Hierbei bezeichnet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ den Schwarzraum. T ist somit selbstadjungiert. Mittels Aufgabe 3 von Übungsblatt 11 erhält man: $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. Das Punktspektrum soll nun berechnet werden:

a) Für $j = 1 \ldots d$ sei $A_j : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d), \ A_j u := x_j u + \frac{\partial u}{\partial x_j}$. Zeigen Sie, dass gilt: $(A_i A_j^* - A_j^* A_i)u = 2\delta_{ij} u$ für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. (Beachten Sie, dass $D(A_j^*) \supset D(A_j)$ gilt.) Zeigen Sie ferner die Operatoridentität $\tilde{T} = \sum_{j=1}^{d} (A_j^* A_j + 1)$.

b) Sei N_j der selbstadjungierte Operator, der gemäß Konstruktion der Friedrichserweiterung aus der Bilinearform $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}, (u, v) \mapsto \langle A_j u, A_j v \rangle$ entsteht. Zeigen Sie, dass $\inf \sigma(N_j) = 0$ ein Eigenwert von N_j ist für $j = 1 \ldots d$.

c) Beweisen Sie die folgenden Kommutatorrelationen:

$$\begin{aligned} N_j A_j u &= A_j (N_j - 2) u \qquad (u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \ j = 1 \ldots d) \\ N_j A_j^* u &= A_j^* (N_j + 2) u \qquad (u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \ j = 1 \ldots d) \end{aligned}$$

d) Sei ψ eine Eigenfunktion von T. Nehmen Sie ohne Beweis an, dass ψ bereits in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ liegt. Zeigen Sie mit Hilfe von b) und c), dass es $m_j \in \mathbb{Z}$ gibt, $j = 1 \ldots d$, sodass $\phi := \prod_{j=1}^{d} A_j^{m_j} \psi \neq 0$, aber $A_k \phi = 0$ für alle $k = 1 \ldots d$ gilt. Folgern Sie, dass $\sigma(T) = d + 2\mathbb{N}$ gilt.