Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Spektraltheorie von Differentialoperatoren
Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Ein Operator $T : D(T) \subset H \to H$ heißt positiv, falls $\langle Tu, u\rangle \geq 0 \ \ (u \in D(T))$ gilt.

a) Sei T selbstadjungiert und $\sigma(T) \subseteq [\lambda_0, \infty)$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $\lambda < \lambda_0$ gilt:

$$R_T(\lambda) \leq |\lambda_0 - \lambda|^{-1}$$

b) Sei T selbstadjungiert. Zeigen Sie

$$T \text{ ist positiv, genau dann, wenn } \sigma(T) \subseteq [0, \infty)\,.$$

Aufgabe 2

Sei $T : D(T) \subset H \to H$ selbstadjungiert

a) Ist $S : H \to H$ symmetrisch und beschränkt, so ist

$$T + S:\ D(T) \to H$$

selbstadjungiert

b) Ist T zusätzlich injektiv, so ist $T^{-1}:\ D(T^{-1}) := R(T) \to H$ selbstadjungiert

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar, sowie $f \notin L^2(\mathbb{R})$ Sei weiter $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig und fest. Betrachte den Operator T definiert durch

$$D(T) := \{u \in L^2(\mathbb{R}) : \int f(x)u(x) < \infty\} \qquad Tu := \langle u, f\rangle\psi_0.$$

Berechnen Sie den T^*.