Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Spektraltheorie von Differentialoperatoren
Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Betrachte $T_p : D(T_p) \subset L^2(0, 2\pi) \to L^2(0, 2\pi),\ T_p f = -f''$. Dabei ist

$$D(T_p) := \{f \in C^2(0, 2\pi) : f(2\pi) = f(0),\ f'(2\pi) = f'(0)\}.$$

Zeigen Sie, dass T_p wesentlich selbstadjungiert, aber nicht selbstadjungiert ist.

Aufgabe 2

Sei $T : D(T) \subset H \to H$ ein symmetrischer Operator. Dann ist die Cayley-Transformierte von T gegeben durch

$$U : D(U) := R(T + i) \subset H \to R(T - i),\ Uf := (T - i)(T + i)^{-1} f,$$

a) Zeigen Sie, dass U wohldefiniert und isometrisch ist. Zeigen Sie weiter, dass die Cayley-Transformierte einer symmetrischen Erweiterung von T eine isometrische Erweiterung von U ist.

b) Um zu zeigen, dass jede isometrische Erweiterung von U die Cayley-Transformierte einer symmetrischen Erweiterung von T ist, zeigen Sie zunächst, dass für jede solche Erweiterung $\overline{U}$ gilt: $\overline{U} - 1$ ist injektiv. Definieren Sie anschließend

$$\overline{T} : D(\overline{T}) := (\overline{U} - 1)D(\overline{U}) \to H,\ \overline{T} f := -i(\overline{U} + 1)(\overline{U} - 1)^{-1} f.$$

Zeigen Sie, dass $\overline{T}$ den Operator T erweitert und die Cayley-Transformierte von $\overline{T}$ mit $\overline{U}$ übereinstimmt.

Aufgabe 3

Sei $T : D(T) \subset H \to H$ wesentlich selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass $R(T \pm i)$ dicht ist und folgern Sie, dass es genau eine selbstadjungierte Erweiterung von T gibt.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2.

Wieviele selbstadjungierte Erweiterungen von nicht wesentlich selbstadjungierten Operatoren gibt es? Geben Sie einige davon an.