Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Spektraltheorie von Differentialoperatoren
Übungsblatt 4

Aufgabe 1

a) Betrachten Sie den Operator T auf $L^2(0,\infty)$ definiert durch

$$D(T) = C_0^\infty(0,\infty) \qquad Tu = iu'$$

und berechnen Sie $\overline{T}$ und $\sigma(\overline{T})$.

b) Berechnen Sie das Spektrum des Impulsoperators

$$T_{imp} : H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),\ T_{imp}u = iu'.$$

Aufgabe 2

Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Interval. Betrachten Sie $T_0 : D(T_0) = C_0^\infty(a,b) \subset L^2(a,b) \to L^2(a,b)$, $T_0 u = -u''$. Benutzen Sie Aufgabe 2 von Übungsblatt 3 um alle selbstadjungierten Erweiterungen in Form von Randbedingungen zu charakterisieren und geben Sie deren Definitionsbereiche an. Warum sind die Defekträume von T_0 Teilräume von $C^\infty[a,b]$?

Aufgabe 3

Sei $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $V \geq 0$ eine Potentialfunktion. Zeigen Sie, dass der Operator

$$T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),\ Tu := -\Delta u + Vu$$

wesentlich selbstadjungiert ist. Benutzen Sie dabei (ohne Beweis) Kato's Ungleichung (siehe unten) um zu zeigen, dass das Problem

$$-\Delta u + Vu + u = 0 \qquad u \in L^2$$

im Distributionensinne (d.h. $\int_{\mathbb{R}^n} u\,(-\Delta v + Vv + v) = 0$ für alle $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$) nur die triviale Lösung hat.

Kato's Ungleichung
Sei $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $-\Delta u \in L^1_{loc}$, dann gilt

$$\Delta|u| \geq Re(sgn(u)\Delta u)$$

im distributionellen Sinne. Das heißt: Für alle $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi \geq 0$ gilt:

$$(\Delta|u|)[\phi] \geq Re(sgn(u)\Delta u)[\phi]$$