Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Spektraltheorie von Differentialoperatoren
Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fouriertransformation der folgenden Funktionen.

a) $u \in L^1(\mathbb{R})$ gegeben durch $u(x) := \frac{1}{1+x^2}$

b) $v \in L^2(\mathbb{R})$ gegeben durch $v(x) := \begin{cases} \frac{1}{\ulcorner |x| \urcorner} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, wobei $\ulcorner x \urcorner$ die kleinste ganze Zahl beschreibt, die größer als x ist.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Fouriertransformation der folgenden Distributionen.

a) $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ gegeben durch $u(x) = \sin(x)$.

b) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ sei $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ gegeben durch $v(x) = x^\alpha$.

c) Für $x_0 \in \mathbb{R}$ sei $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ gegeben durch $w[\phi] := \phi(x_0)$ für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die Heisenberg'sche Unschärferelation: Sei $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |u(x)|^2 \, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} y^2 |\hat{u}(y)|^2 \, dy \geq \frac{1}{4}$$

Aufgabe 4

Hier soll gezeigt werden, dass das Abklingverhalten der Fouriertransformation direkt mit der Glattheit der Funktion zusammenhängt:

a) Sei $u \in L^1(\mathbb{R})$ und $\hat{u}(y) = O\left(|y|^{-(1+\alpha)}\right)$ für $|y| \to \infty$ und ein $0 < \alpha < 1$. Beweisen Sie, dass u dann Hölder-stetig mit Exponenten α ist.

b) Sei $u \in C_c(\mathbb{R})$ und es gibt eine Umgebung U von 0 mit

$$u|_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{-\log|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass es kein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $\hat{u}(y) = O\left(|y|^{-(1+\varepsilon)}\right)$ für $|y| \to \infty$.

c) Sei $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, so ist $\hat{u}$ analytisch.