Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Spektraltheorie von Differentialoperatoren
Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{E}$ definiert durch:

$$\mathcal{E} := \{g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \ \exists m \in \mathbb{N} : \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|(1+|x|)^{-m}\, dx < \infty\}$$

Zeigen Sie, dass $L^p(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{E}$ für alle $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie weiter, dass jede Funktion $u \in \mathcal{E}$ mit einer Distribution $f_u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ identifiziert werden kann.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass das Problem

$$-\Delta f = g \qquad \text{in } \mathbb{R}^d$$

für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $d \geq 5$ eine Lösung $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ hat. Gilt dies auch für $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$?

b) Zeigen Sie, dass das Problem

$$-\Delta f + f = g \qquad \text{in } \mathbb{R}^d$$

für $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ eine schwache Lösung hat.

Aufgabe 3

Ein Operator T auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ heißt lokal, falls $supp(Tu) \subseteq supp(u)$ für alle $u \in D(T)$ mit $supp(u)$ kompakt.

a) Zeigen Sie, dass jeder Differentialoperator auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ lokal ist.

b) Definieren Sie den Operator $\sqrt{-\Delta} : H^2(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ in geeigneter Weise mithilfe der zu $-\Delta$ gehörigen Spektralschar.

c) Beweisen Sie, dass $\sqrt{-\Delta}$ kein Differentialoperator ist.

Aufgabe 4

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $L := \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ein Differentialausdruck und T der dazugehörige Differentialoperator. Berechnen Sie das Spektrum von T.