Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Spektraltheorie von Differentialoperatoren
Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und offen und $V \subset\subset U$. Für $u \in L^p(U)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, $i = 1..d$ und $0 < |h| < dist(V, \partial U)$ definiere den i-ten Differenzenquotienten durch

$$D_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \qquad \forall x \in V$$

Ferner Sei D^h definiert durch $D^h u := (D_1^h u, ..., D_d^h u)$. Beweisen Sie die folgenden beiden Eigenschaften:

a) Für $1 \leq p < \infty$ und $u \in H^1(U)$ gilt für jedes $V \subset\subset U$:

$$\|D^h u\|_{L^2(V)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(U)} \qquad \forall_{1<|h|<\frac{1}{2}dist(V,\partial U)}$$

b) Für $1 \overset{!}{<} p < \infty$ gilt: Falls $\|D^h u\|_{L^2(V)} \leq C \; \forall_{0<|h|<\frac{1}{2}dist(V,\partial U)}$, dann gilt

$$u \in H^1(V) \text{ mit } \|\nabla u\|_{L^2(V)} \leq C.$$

Aufgabe 2+3

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und offen und L ein gleichmäßig streng elliptischer Differentialausdruck zweiter Ordnung in Divergenzform definiert durch

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} D_j(a_{ij} D_i u(x)) + \sum_{i=1}^{d} b_i D_i u + cu.$$

Hierbei seien $a_{ij} \in C^1(U)$, $b_i, c \in L^\infty(U)$ für $i, j = 1..d$. In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass für jedes $V \subset\subset U$ ein $C = C(V)$ mit folgender Eigenschaft existiert: Ist $f \in L^2(U)$ und $u \in H^1(U)$ eine Lösung der Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^{d} \int_U a_{ij}(x) D_i u(x) D_j v(x) + \sum_{i=1}^{d} \int_U b_i(x) D_i u(x) v(x)\, dx + \int_U c(x) u(x) v(x)\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(U), \tag{1}$$

so gilt: $u \in H^2(V)$ und

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{H^1(U)}).$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Sei $V \subset\subset U$ fest und ζ eine glatte Abschneidefunktion mit

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{auf } V \\ \zeta \equiv 0 & \text{auf } \mathbb{R}^d \setminus U \end{cases}$$

und Werten in $[0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$-\sum_{i,j=1}^{d} \int_U a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \left[D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)\right](x)\, dx = \int_U \tilde{f}(x) \left[D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)\right](x)\, dx \qquad (2)$$

gilt, indem Sie die Gleichung (1) mit einer entsprechenden $H_0^1(U)$-Funktion testen. Dabei ist $\tilde{f} := f - \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u - cu.$

b) Benutzen Sie die Elliptizität um zu zeigen, dass die linke Seite von (2) abgeschätzt werden kann durch:

$$\begin{aligned} &-\sum_{i,j=1}^{d} \int_U a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \left[D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)\right](x)\, dx \\ \geq &\frac{\theta}{2} \int_U \zeta^2(x) |D_k^h \nabla u(x)|^2\, dx - C \int_U |\nabla u(x)|^2\, dx. \end{aligned}$$

c) Schätzen Sie die rechte Seite von (2) ab durch:

$$\begin{aligned} &\int_U \tilde{f}(x) \left[D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)\right](x)\, dx \\ \leq &\frac{\theta}{4} \int_u \zeta^2(x) |D_k^h \nabla u(x)|^2\, dx + C \int_U f^2(x) + u^2(x) + |Du(x)|^2\, dx. \end{aligned}$$

d) Kombinieren Sie beide Ergebnisse und verwenden Sie Aufgabe 1, um die gewünschte Abschätzung für $\|u\|_{H^2(V)}$ zu erhalten.