Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Spektraltheorie von Differentialoperatoren
Übungsblatt 8

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass die Brillouin-Zone B eine fundamentale Periodizitätszelle des reziproken Gitters Z ist, das heißt, dass $\mathbb{R}^d = \bigcup_{z \in Z} (\overline{B}+z)$ und die Vereinigung ist bis auf Nullmengen disjunkt.

b) Zeigen Sie, dass jede fundamentale Periodizitätszelle gleiches Volumen hat.

Aufgabe 2

Sei L ein Differentialausdruck m-ter Ordnung mit periodischen Koeffizienten bzgl. $(a_j,\ j = 1..d)$. Zeigen Sie, dass das Eigenwertproblem (40),(41) aus der Vorlesung

$$\begin{cases} L(\cdot, D)\psi = \lambda w \psi & (x \in \Omega) \\ \psi(x + a_j) = e^{ik\cdot a_j}\psi(x) & (x \in \mathbb{R}^d,\ j = 1..d) \end{cases}$$

für $k \in \overline{B}$ symmetrisch ist.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass die Eigenwerte des quasiperiodischen Eigenwertproblems (40),(41) stetig von $k \in \overline{B}$ abhängen. Dazu wurde mittels Transformation (43) das Problem in das periodische Eigenwertproblem

$$\begin{cases} L(\cdot, D + ik)\phi = \lambda w \phi & (x \in \Omega) \\ \phi(x + a_j) = \phi(x) & (x \in \mathbb{R}^d,\ j = 1..d) \end{cases}$$

transformiert. Sei $A(k) : D(A(k)) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ mit

$$D(A(k)) := \{u \in H^m(\Omega) : \phi(x + a_j) = \phi(x) \text{ für alle } x \in \partial\Omega \text{ mit } x + a_j \in \partial\Omega\}.$$

und $A(k)u = \frac{1}{w}L(\cdot, D + ik)u$ für $u \in D(A)$.

a) Sei $k_0 \in \overline{B}$ fest und $\lambda \in \rho(A(k_0))$. Zeigen Sie, dass es dann eine offene Umgebung $U \subset \overline{B}$ gibt, sodass $\lambda \in \rho(A(k))$ für alle $k \in U$ gilt (offene Umgebungen von Randpunkten werden mittels Identifikation der gegenüberliegenden Ränder von B definiert). Zeigen Sie weiter, dass die Abbildung

$$R(\lambda, A(\cdot)) : U \to \mathcal{L}(L^2(\Omega)),\ k \mapsto R(\lambda, A(k))$$

stetig ist. $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$ sei hier wie immer mit der Operatornormtopologie ausgestattet.
Verwenden Sie den Satz über die Neumann'sche Reihe

b) Sei $\lambda_0 \in \sigma(A(k_0))$ ein isolierter, einfacher Eigenwert von $A(k_0)$. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass der Operator

$$P(k_0) = -2\pi i \int_{\Gamma_\varepsilon} R(\lambda, (A(k_0)))\, d\lambda \tag{1}$$

mit $\Gamma_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} : \; |\lambda - \lambda_0| = \varepsilon\}$ wohldefiniert ist und dass $P(k_0)$ die Projektion auf den Eigenraum zum Eigenwert λ_0 ist. Begründen Sie, dass es eine Umgebung $V \subset \overline{B}$ von k_0 gibt, sodass $P(k)$ für alle $k \in V$ durch eine zu (1) analoge Formel definiert werden kann. Folgern Sie, dass die Abbildung $P : \; V \to \mathcal{L}(L^2(\Omega)),\, k \mapsto P(k)$ stetig in k_0 ist.

c) Sei $\lambda_s(k)$ der s-te Eigenwert von $A(k)$. Beweisen Sie, dass die Abbildung $k \to \lambda_s(k)$ stetig auf $\overline{B}$ ist $(\forall s \in \mathbb{N})$.