Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
M. Sc. Peter Rupp

Spektraltheorie von Differentialoperatoren
Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Sei $T : H^2(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d),\ u \mapsto -\Delta u + Vu$, wobei $V \in C^{d+1}(\mathbb{R}^d)$ periodisch bezüglich des Gitters Γ. Sei B die Brillouin-Zone und $K_1, .., K_d$ eine Basis des reziproken Gitters Γ^*. Seien $V_m,\ m = (m_1, .., m_d) \in \mathbb{Z}^d$ die Fourierkoeffizienten von V. Sei weiter

$$\mathcal{H} := L^2(B; l^2(\mathbb{Z}^d)) := \left\{ g : B \to l^2(\mathbb{Z}^d) : \int_B \|g(p)\|_{l^2}^2 \, dp < \infty \right\}$$

der Raum der quadratintegrierbaren l^2-wertigen Funktionen, ausgestattet mit der Norm

$$\|g\|_{\mathcal{H}} := \left(\int_B \|g(p)\|_{l^2}^2 \, dp \right)^{1/2}.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Die Abbildung $U : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{H},\ ((Uf)(p))_j := \hat{f}\left(p + \sum_{j=1}^{d} m_j K_j \right)$ ist isometrisch. U kann zu einem isometrischen Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt werden.

b) Der Operator $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ ((Sg)(p))_m := \left(p + \sum_{j=1}^{d} m_j K_j \right)^2 \cdot g(p)_m + \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} V_{m-l} g_l(p)$ mit kanonischem Definitionsbereich

$$D(S) = \left\{ g \in \mathcal{H} : \int_B \left\| \left(p + \sum_{j=1}^{d} m_j K_j \right)^2 g(p) \right\|_{l^2}^2 dp < \infty \right\}$$

erfüllt die Operatorgleichung:

$$U^{-1} S U = T$$

Aufgabe 2

Seien die Bezeichnungen wie in Aufgabe 1. Für $p \in B$ sei der Operator $S_0(p) : l^2 \to l^2,\ (S_0(p)a)_m := \left(p + \sum_{j=1}^{d} m_j K_j \right)^2 \cdot a_m$ mit kanonischem Definitionsbereich definiert. Sei weiter $S_1(p)$ auf l^2 definiert durch $(S_1(p)a)_m := \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} V_{m-l} a_l$, sowie $S(p) := S_0(p) + S_1(p)$.

a) Zeigen Sie, dass $S_0(p)$ und $S(p)$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitzen.

b) Zeigen Sie, dass der Operator $S_1(p)$ beschränkt ist und folgern Sie, dass für die Eigenwerte $\lambda_n^0(p)$ von $S_0(p)$ und $\lambda_n(p)$ von $S(p) := S_0(p) + S_1(p)$ gilt:

$$|\lambda_n^0(p) - \lambda_n(p)| \leq \|S_1(p)\|.$$

Bemerkung: Man kann analog zur Vorlesung auch die unitäre Abbildung U anstatt der Floquet-Transformation benutzen, um das Spektrum zu analysieren. Die quasiperiodischen Eigenwertprobleme werden dann durch die Eigenwertprobleme von $S(p)$ ersetzt. Es gilt (was hier nicht bewiesen werden soll):

$$\sigma(T) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\lambda_n(p) : p \in B\}$$

und die Eigenwerte sind stetig als Funktionen von p.

c) Sei

$$N(p,\lambda) := \#\left\{\gamma \in \Gamma^* : \sum_{j=1}^{d} (\gamma_j + p_j)^2 \leq \lambda\right\}.$$

Verwenden Sie das Resultat

$$\lim_{\lambda\to\infty} (\max_{p\in B} N(p, \lambda - t) - \min_{p\in B} N(p, \lambda + t)) = \infty$$

für jedes feste $t > 0$ um zu zeigen, dass T nur endlich viele Lücken im Spektrum hat.