Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2014
17.04.2014

Spektraltheorie

1. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei $E := C([0,1])$. Der Operator $A\colon E \to E$ sei gegeben durch

$$(Ax)(t) := tx(t) \quad (t \in [0,1]).$$

Zeigen Sie:

(a) $A \in L(E)$ mit $\|A\| = 1$.

(b) A besitzt keine Eigenwerte, d.h. $\sigma_p(A) = \emptyset$.

(c) $\sigma(A) = [0,1]$.

(d) $r(A) = 1$.

Aufgabe 2
Seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $R\colon l^2 \to l^2$ der rechte Verschiebungsoperator, also

$$R(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Ferner sei $(c_n)_{n=1}^{\infty} \in \omega$ eine komplexe Nullfolge mit $c_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Operatoren $M, T \in L(l^2)$ seien definiert durch

$$Mx := (c_n x_n)_{n=1}^{\infty} \quad \big(x = (x_n) \in l^2\big)$$

und $T := MR$.

(a) Berechnen Sie $\|T^m\|$ für $m \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie $\sigma(T) = \{0\}$.

(c) Beweisen Sie, dass T keinen Eigenwert hat.

(d) Zeigen Sie, dass T ein kompakter Operator ist.

Aufgabe 3
Sei $\mathcal{A}$ eine komplexe Banachalgebra mit Einselement $e \in \mathcal{A}$. Ferner seien $a \in \mathcal{A}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\sigma(a) \subseteq \Omega$. Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\sigma(a+b) \subseteq \Omega \quad (b \in \mathcal{A} \text{ mit } \|b\| < \delta).$$

Aufgabe 4
Seien R der rechte, L der linke Verschiebungsoperator auf ω, also

$$R(x_1, x_2, \ldots) := (0, x_1, x_2, \ldots), \quad L(x_1, x_2, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots).$$

Zeigen Sie:

(a) $\alpha(R) = 0, \quad \beta(R) = 1, \quad p(R) = 0, \quad q(R) = \infty.$

(b) $\alpha(L) = 1, \quad \beta(L) = 0, \quad p(L) = \infty, \quad q(L) = 0.$

Organisatorisches

Übungsblätter

- Das neue Übungsblatt gibt es donnerstags in der Übung oder auf der Homepage http://www.math.kit.edu/iana2/lehre/spektraltheorie2014s/
- Keine Abgabe, keine Korrektur.

Bei Fragen

- Sprechstunde: Mittwoch 10:00-11:00, Zimmer 3B-04 im Allianz-Gebäude.
- E-Mail: carlos.hauser@kit.edu