

Spektraltheorie

10. Übungsblatt

Aufgabe 37

Sei $E := \{x \in C([0, \infty), \mathbb{K}) : \lim_{s \rightarrow \infty} x(s) = 0\}$ versehen mit der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ und $Q: [0, \infty) \rightarrow L(E)$ sei definiert durch

$$(Q(t)x)(s) := x(t+s) \quad (x \in E, t \geq 0, s \geq 0).$$

Zeigen Sie:

(a) Q ist eine C_0 -Halbgruppe.

(b) Der zu Q gehörende Erzeuger $A: D(A) \rightarrow E$ ist gegeben durch

$$D(A) = \{x \in C^1([0, \infty), \mathbb{K}) : \lim_{s \rightarrow \infty} x(s) = 0, \lim_{s \rightarrow \infty} x'(s) = 0\} \quad \text{und} \\ Ax = x' \quad (x \in D(A)).$$

Aufgabe 38

Seien E ein Banachraum über \mathbb{C} , $Q: [0, \infty) \rightarrow L(E)$ eine C_0 -Halbgruppe mit Erzeuger A sowie $\lambda \in \mathbb{C}$ und $a > 0$. Ferner sei $T: [0, \infty) \rightarrow L(E)$ definiert durch

$$T(t) := e^{\lambda t} Q(at) \quad (t \geq 0).$$

Zeigen Sie:

(a) T ist eine C_0 -Halbgruppe.

(b) Der zu T gehörende Erzeuger $B: D(B) \rightarrow E$ ist gegeben durch

$$D(B) = D(A) \quad \text{und} \quad B = \lambda I + aA.$$

Aufgabe 39

Seien E ein Banachraum und $Q_1, Q_2: [0, \infty) \rightarrow L(E)$ zwei C_0 -Halbgruppen mit zugehörigen Erzeugern A_1 und A_2 . Zeigen Sie:

$$A_1 = A_2 \quad \implies \quad Q_1(t) = Q_2(t) \quad (t \geq 0).$$

Aufgabe 40

Seien E ein Banachraum über \mathbb{K} und $Q: [0, \infty) \rightarrow L(E)$ eine C_0 -Halbgruppe. Zeigen Sie für jedes $x \in E$, dass

$$Q(t)x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{tA_\varepsilon} x$$

gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $[0, \infty)$.

Hinweis: Verwenden Sie für $x \in D(A)$, $\varepsilon > 0$ und $0 < s < t$ die Darstellung

$$Q(t)x - \exp(tA_\varepsilon)x = \int_0^t \frac{d}{ds} [\exp((t-s)A_\varepsilon)Q(s)x] ds$$

und nutzen Sie Aussagen aus dem Beweis von Satz 12.11.