Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2014
26.06.2014

Spektraltheorie

11. Übungsblatt

Aufgabe 41
Es seien H ein komplexer Hilbertraum, $A, B \in L(H)$ normal mit $AB = BA$. Zeigen Sie, dass AB normal ist.

Aufgabe 42
Sei H ein komplexer, separabler, unendlichdimensionaler Hilbertraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) $T \in \mathcal{T}(H)$.

(b) Es existieren Folgen $(x_n), (y_n)$ in H und $(a_n) \in l^1$ mit $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie

$$Tx = \sum_n a_n(x, x_n)y_n \quad (x \in H). \tag{$*$}$$

Aufgabe 43
Sei H ein komplexer, separabler Hilbertraum mit $\dim(H) = \infty$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{\mathcal{T}(H)} = \mathcal{K}(H)$.

(b) Für $T \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$ sei

$$Tx = \sum_k \lambda_k(x, u_k)v_k \quad (x \in H).$$

die Darstellung aus Satz 4.3. Dann gilt:

$$\mathrm{tr}(|T|) = \sum_k \lambda_k.$$

Hinweis: Mit dem Beweis von Aufgabe 42 ist diese Aussage praktisch schon bewiesen. Gleiches gilt für den (c)-Teil.

(c) Es gilt:

$$\mathrm{tr}(|T|) = \inf \sum_n |a_n|.$$

Dabei erstreckt sich das Infimum über alle Darstellungen von T von der Form $(*)$.

Aufgabe 44

Zeigen Sie für $T \in L(L^2[0,1])$ die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(a) Es gibt eine Funktion $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$ mit

$$(Tx)(s) = \int_0^1 k(s,t)x(t)\,dt \quad \text{für fast alle } s \in [0,1].$$

(b) $T \in \mathcal{H}(L^2[0,1])$.

Zeigen Sie zudem, dass in diesem Fall $\|T\|_2 = \|k\|_{L^2}$ gilt.

Hinweis zu „(b) $\Rightarrow$ (a)“: Zeigen Sie zunächst, dass alle $T \in \mathcal{F}(H)$ eine Integraldarstellung wie in (a) besitzen.

Hinweise zur Prüfung

- Es wird eine mündliche Prüfung geben. Der Prüfungszeitraum ist von Montag 21.Juli bis Freitag 01.August 2014 (erste beiden Wochen der vorlesungsfreien Zeit).
- Bitte melden Sie sich zunächst im QISPOS zur Prüfung an.
- Gehen Sie anschließend zu Frau Ewald (Raum 3A-26.1 im Allianz-Gebäude) um einen Termin für die Prüfung zu vereinbaren.