Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2014
03.07.2014

Spektraltheorie

12. Übungsblatt

In den ersten drei Aufgaben sei X stets ein komplexer Banachraum, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \to X$.

Aufgabe 45
Seien f im Gebiet D holomorph und $\lambda \mapsto \|f(\lambda)\|$ dort nicht konstant. Zeigen Sie, dass $\lambda \mapsto \|f(\lambda)\|$ kein absolutes Maximum in D besitzt.

Aufgabe 46
Sei $D := \{z \in \mathbb{C}\colon 1 < \operatorname{Re} z < 2\}$, $f\colon \overline{D} \to X$ holomorph in D und stetig in $\overline{D}$. Zudem gelte

(a) $\sup\left\{\|f(z)\|\colon z \in \overline{D}\right\} < \infty$,

(b) $\sup\{\|f(1+iy)\|, \|f(2+iy)\|\colon y \in \mathbb{R}\} \leq M$ für ein $M > 0$.

Zeigen Sie:

$$\sup\left\{\|f(z)\|\colon z \in \overline{D}\right\} \leq M.$$

Aufgabe 47
Seien D ein Gebiet und f holomorph in D mit $f \not\equiv 0$ sowie

$$H_0 := \{z \in \mathbb{C}\colon \text{Es gibt eine Folge } (z_n)_{n=1}^{\infty} \text{ in } D \text{ mit } z_n \to z \text{ und } f(z_n) = 0 \ (n \in \mathbb{N})\}.$$

Zeigen Sie, dass $H_0 \subseteq \mathbb{C}\backslash D$ gilt.

Aufgabe 48
Seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $g \in C([0,1]) =: E$ und

$$T_g\colon \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto (T_g x)(t) := g(t)x(t) \quad (t \in [0,1]). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $\sigma(T_g) = g([0,1])$ und $R_\lambda(T_g)\colon E \to E$ ist für alle $\lambda \in \rho(T_g)$ gegeben durch

$$\left(R_\lambda(T_g)y\right)(t) := \frac{1}{\lambda - g(t)} y(t) \quad (y \in E, t \in [0,1]).$$

(b) $r(T_g) = \|g\|_\infty$

(c) Für $f \in \mathcal{H}(T_g)$ ist

$$(f(T_g)x)(t) = f(g(t))x(t) \quad (t \in [0,1]).$$