Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2014
10.07.2014

Spektraltheorie

13. Übungsblatt

Aufgabe 49

(a) Sei $R\colon l^2 \to l^2$ der rechte Verschiebungsoperator, also

$$R(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Zeigen Sie, dass $\sigma_{ap}(R) = \{z \in \mathbb{K}\colon |z| = 1\}$ ist.

(b) Der Operator $A\colon C([0,1],\mathbb{C}) \to C([0,1],\mathbb{C})$ sei gegeben durch

$$(Ax)(t) := tx(t) \quad (t \in [0,1]).$$

Nach Aufgabe 1 ist $A \in L(C([0,1]))$ mit $\sigma(A) = [0,1]$. Zeigen Sie, dass $\sigma_{ap}(A) = \sigma(A)$.

Aufgabe 50

Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und einen komplexen Banachraum E seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ paarweise disjunkte Spektralmengen eines Operators $T \in L(E)$, $P_1, \ldots, P_n$ die dazugehörenden Spektralprojektoren und $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_n$. Zeigen Sie:

(a) $P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad (i,j = 1, \ldots, n)$ und $I = \sum_{i=1}^{n} P_i$.
(Dabei bezeichnet $\delta_{\nu\mu}$ das Kroneckersymbol.)

(b) $E = P_1(E) \oplus \ldots \oplus P_n(E)$.

(c) $P_i(E)$ ist invariant unter $T \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Aufgabe 51

Der komplexe Banachraum E sei direkte Summe der abgeschlossenen, unter $A \in L(E)$ invarianten Unterräume E_1 und E_2. Ferner sei A_k die Einschränkung von A auf E_k für $k = 1, 2$. Zeigen Sie:

$$\rho(A) = \rho(A_1) \cap \rho(A_2) \text{ und } \sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2).$$

Aufgabe 52

Seien E ein komplexer, endlichdimensionaler Banachraum und $T \in L(E)$ mit $r(T) = 0$. Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T^n = 0$ existiert.
Hinweis: Nutzen Sie Satz 18.2.