Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2014
24.04.2014

# Spektraltheorie

## 2. Übungsblatt

**Aufgabe 5**
Seien $E$ ein Banachraum, $E = E_1 \oplus E_2$ und $A \in L(E)$, wobei die Unterräume $E_1$, $E_2$ invariant unter $A$ seien. Ferner sei $A_k \in L(E_k)$ definiert durch $A_k := A|_{E_k}$ $(k = 1, 2)$. Zeigen Sie:

(a) (i) $N(A) = N(A_1) \oplus N(A_2)$. (ii) $A(E) = A_1(E_1) \oplus A_2(E_2)$.

(b) (i) $\alpha(A) = \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$. (ii) $\beta(A) = \beta(A_1) + \beta(A_2)$.

(c) (i) $p(A) < \infty \Leftrightarrow p(A_1), p(A_2) < \infty$. (ii) $q(A) < \infty \Leftrightarrow q(A_1), q(A_2) < \infty$.

**Aufgabe 6**
Seien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $L\colon l^2 \to l^2$ der linke Verschiebungsoperator, also

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots).$$

Ferner sei $(c_n)_{n=1}^\infty \in \omega$ eine komplexe Nullfolge. Der Multiplikationsoperator $M \in L(l^2)$ sei definiert durch

$$Mx := (c_n x_n)_{n=1}^\infty \quad \big(x = (x_n) \in l^2\big)\,.$$

Zeigen Sie:

(a) $M \in \mathcal{K}(l^2)$.

(b) $\mathcal{S} := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| = 1\} \subseteq \sigma(L + M)$.

**Aufgabe 7**
Sei $E := C([0, 1])$. Der Volterra-Operator $T\colon E \to E$ sei definiert durch

$$(Tf)(t) := \int_0^t f(s)\,ds \quad (t \in [0, 1])\,.$$

Zeigen Sie:

(a) $T \in \mathcal{K}(E)$.

(b) $\sigma_p(T) = \emptyset$.

(c) $\sigma(T) = \{0\}$.



— bitte wenden —

**Aufgabe 8**
Gegeben sei das Sturmsche Randwertproblem

$$\begin{cases} u'' = \lambda u \quad \text{in } [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{$P_\lambda$}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter ist. Der Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Eigenwert von $(P_\lambda)$, falls eine Lösung $u \in C^2([0,1],\mathbb{R})$, $u \neq 0$, von $(P_\lambda)$ existiert. In diesem Fall heißt $u$ eine zugehörige Eigenfunktion.
Die zu $(P_\lambda)$ gehörende Greensche Funktion $G\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$G(x,t) := \begin{cases} -(1-x)t, & 0 \leq t \leq x \leq 1, \\ -x(1-t), & 0 \leq x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

und der Operator $T\colon C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$ sei definiert durch

$$(Tu)(x) := \int_0^1 G(x,t)u(t)\,dt \quad (x \in [0,1]).$$

Zeigen Sie:

(a) Die Eigenwerte von $(P_\lambda)$ sind $\{-n^2\pi^2 \colon n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Das Randwertproblem

$$\begin{cases} u'' = w \quad \text{in } [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{$P$}$$

hat für jedes gegebene $w \in C([0,1],\mathbb{R})$ genau eine Lösung $u \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ und diese ist gegeben durch

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t)w(t)\,dt \quad (x \in [0,1]).$$

(c) $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert der Sturmschen Randwertaufgabe $(P_\lambda)$, wenn $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von $T$ ist.

(d) $T \in \mathcal{K}\big(C([0,1],\mathbb{R})\big)$.

(e) $0 \notin \sigma_p(T)$.