Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2014
Institut für Analysis 01.05.2014
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Carlos Hauser

Spektraltheorie

3. Übungsblatt

Aufgabe 9
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Geben Sie jeweils einen Operator $A : l^2 \to l^2$ an, der die geforderten Eigenschaften hat und beweisen Sie diese.

(a) Seien $N \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$. $A \in \mathcal{K}(l^2)$ mit $\sigma_p(A) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.
Hinweis: Der Multiplikationsoperator aus Aufgabe 6 könnte helfen.

(b) Sei $(\lambda_n)_{n=1}^\infty \in \omega$ eine komplexe Nullfolge. $A \in \mathcal{K}(l^2)$ mit $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$ eine kompakte Menge. $A \in L(l^2)$ mit $\sigma(A) = M$.
Hinweis: Jede kompakte Menge ist separabel.

Aufgabe 10
Sei $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ definiert durch

$$(Kx)(t) := \int_0^t x(s)\,ds \quad (t \in [0,1]).$$

(a) Zeigen Sie $K \in \mathcal{K}(L^2([0,1]))$.

(b) Berechnen Sie $K^* \in \mathcal{K}(L^2([0,1]))$.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen des Eigenwertproblems

$$K^*Kx = \mu x \text{ mit } \mu > 0 \text{ und } x \in L^2([0,1]).$$

(d) Bestimmen Sie Folgen (λ_n) in $\mathbb{R}$ und (u_n), (v_n) in $L^2([0,1])$, sodass

$$\lambda_n > 0 \ (n \in \mathbb{N}), \{u_n\}_{n=1}^\infty, \{v_n\}_{n=1}^\infty \text{ ONSe und}$$
$$Kx = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n (x, u_n) v_n \quad (x \in L^2([0,1])).$$

Hinweis: Das Vorgehen ist analog zum Beweis von Satz 4.3.

Aufgabe 11
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $C \in L(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$. Zeigen Sie:

$$J := \big[\{ACB \colon A, B \in L(\mathbb{R}^n)\}\big] = L(\mathbb{R}^n).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass J ein abgeschlossenes Ideal in $L(\mathbb{R}^n)$ ist.

Aufgabe 12
Sei $T \colon L^2([0,1], \mathbb{R}) \to L^2([0,1], \mathbb{R})$ gegeben durch

$$(Tu)(x) := \int_0^1 G(x,t)u(t)\,dt \quad (x \in [0,1]),$$

wobei die Greensche Funktion $G \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$ durch

$$G(x,t) := \begin{cases} -(1-x)t, & 0 \le t \le x \le 1, \\ -x(1-t), & 0 \le x \le t \le 1 \end{cases}$$

definiert ist. Zeigen Sie:

(a) T ist symmetrisch.

(b) $T \in \mathcal{K}(L^2([0,1], \mathbb{R}))$.

(c) $\|T\| = \frac{1}{\pi^2}$.

(d) $\big\{\sqrt{2}\sin(n\pi\cdot) \colon n \in \mathbb{N}\big\}$ ist eine ONB von $L^2([0,1], \mathbb{R})$ aus Eigenfunktionen von T.

Hinweise: Aufgabe 8 und Satz 4.2 können hilfreich sein. Ferner können Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Lebesgue-integrierbare Funktionen verwenden: Ist $f \in L^1([0,1], \mathbb{R})$ und $x_0 \in [0,1]$, so ist die Funktion $F \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\,dt \quad (x \in [0,1]),$$

absulut stetig und somit insbesondere fast überall differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ f.f.a. $x \in [0,1]$.