Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2014
08.05.2014

Spektraltheorie

4. Übungsblatt

Aufgabe 13
Seien

$$M : \begin{cases} l^2 \to l^2 \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots), \end{cases}$$

$$R : \begin{cases} l^2 \to l^2 \\ (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots) \end{cases} \quad \text{und } L : \begin{cases} l^2 \to l^2 \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots). \end{cases}$$

Berechnen Sie $|RM|$ und $|LM|$.

Aufgabe 14
Seien H ein komplexer Hilbertraum und $T \in \mathcal{K}(H)$ symmetrisch und positiv. Zeigen Sie, dass ein positiver symmetrischer Operator $S \in \mathcal{K}(H)$ mit $S^2 = H$ existiert.
Hinweis: Mit der Notation aus Satz 4.2 gilt $Tx = \sum_n \mu_n (x, u_n) u_n$ $(x \in H)$. Deshalb ist $Sx := \sum_n \sqrt{\mu_n} (x, u_n) u_n$ $(x \in H)$ ein guter Kandidat.

Aufgabe 15
Seien H ein komplexer Hilbertraum und $V \in L(H)$. Zeigen Sie:

$$V \text{ ist eine partielle Isometrie} \iff VV^*V = V.$$

Hinweis zu „$\Leftarrow$“: Beweisen Sie, dass V^*V eine Orthogonalprojektion auf $N(V)^\perp$ ist.

Aufgabe 16
Sei H ein Hilbertraum. Ein symmetrischer Operator $C \in L(H)$ heißt positiv definit, falls

$$(Cx, x) > 0 \quad (x \in H \backslash \{0\}).$$

In diesem Fall schreiben wir $C > 0$.
Seien $A, B \in L(H)$ bijektiv, symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie:

$$A \geq B \iff B^{-1} \geq A^{-1}.$$

Aus Symmetriegründen reicht es „$\Rightarrow$“ zu zeigen (Warum?). Betrachten Sie dazu für $x, y \in H$

$$0 \leq \left(B(y - B^{-1}x), y - B^{-1}x \right).$$

Auflösen nach $(B^{-1}x, x)$ und die Wahl $y := Ax$ helfen weiter.