Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2014
15.05.2014

Spektraltheorie

5. Übungsblatt

Aufgabe 17
Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie:

(a) Ein linearer Operator $K \in \mathcal{L}(H)$ ist genau dann kompakt, wenn aus $x_n \rightharpoonup 0$ stets $Kx_n \to 0$ folgt.

(b) Für symmetrische Operatoren $A, B \in L(H)$ mit $0 \leq B \leq A$ gilt:

$$A \in \mathcal{K}(H) \Rightarrow B \in \mathcal{K}(H).$$

Aufgabe 18
Sei H ein komplexer Hilbertraum. Ein linearer Operator $A \in L(H)$ heißt quasinormal, falls $A(A^*A) = (A^*A)A$ gilt. Zeigen Sie für $T \in L(H)$ mit der Polarzerlegung $T = V|T|$ die folgende Äquivalenz:

$$V|T| = |T|V \Longleftrightarrow T \text{ ist quasinormal.}$$

Hinweis zu „$\Leftarrow$“: Zeigen Sie zunächst $T|T| = |T|T$.

Aufgabe 19
Seien H ein komplexer Hilbertraum und $V \in L(H)$ eine partielle Isometrie. Zeigen Sie:

(a) V^* ist eine partielle Isometrie.

(b) VV^* ist die Orthogonalprojektion auf $V(H)$.

Aufgabe 20
Sei H ein komplexer Hilbertraum. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage

$$\overline{L(H)^{-1}} = L(H)$$

abhängig von der Dimension von H:

(a) $\dim(H) < \infty$.

(b) $\dim(H) = \infty$.