Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2014
22.05.2014

Spektraltheorie

6. Übungsblatt

Aufgabe 21
Sei H ein komplexer Hilbertraum. Zeigen Sie:

(a) Seien $M_i \subseteq H$ $(i \in \mathbb{N})$ beliebige Mengen. Dann gilt:

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i\right)^{\perp} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i^{\perp}.$$

(b) Sei $M \subseteq H$ eine beliebige Menge. Dann gilt:

$$\overline{M}^{\perp} = M^{\perp} = [M]^{\perp}.$$

(c) Seien $M_i \subseteq H$ $(i \in \mathbb{N})$ abgeschlossene Unterräume. Dann gilt:

$$\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i\right)^{\perp} = \overline{[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i^{\perp}]}.$$

(d) Seien P_1, P_2 Orthogonalprojektionen auf H mit $P_1P_2 = P_2P_1$. Dann ist $P_1 + P_2 - P_1P_2$ die orthogonale Projektion auf $\overline{[P_1(H) \cup P_2(H)]}$.

Aufgabe 22
Seien H ein komplexer Hilbertraum und (P_k) eine Folge von Orthogonalprojektionen auf H. Zeigen Sie:

(a) Sei P eine orthogonale Projektion mit $P_kx \rightharpoonup Px$ für alle $x \in H$. Dann gilt $P_kx \to Px$ für alle $x \in H$.

(b) Gilt $P_k \leq P_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so konvergiert (P_k) punktweise gegen die orthogonale Projektion auf $\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k(H)}$.

(c) Gilt $P_k \geq P_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so konvergiert (P_k) punktweise gegen die orthogonale Projektion auf $\bigcap_{k=1}^{\infty} P_k(H)$.

— bitte wenden —

Aufgabe 23
Seien H ein komplexer Hilbertraum und $A \in L(H)$ symmetrisch mit $A \geq 0$. Zeigen Sie ohne Verwendung des Funktionalkalküls auf Kapitel 9, dass A eine Wurzel besitzt, indem Sie folgende Aussagen beweisen:

(a) Ist die Aussage für alle A mit $0 \leq A \leq I$ richtig, so ist sie für alle $A \geq 0$ richtig.

(b) Sei $A \leq I$. Dann konvergiert die Folge der (B_n), die durch

$$B_0 := 0, \quad B_{n+1} := B_n + \frac{1}{2}(A - B_n^2) \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

definiert ist, gegen die Wurzel von A. Zeigen Sie dazu induktiv $B_n \leq I$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ und dann $B_n \leq B_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Aufgabe 24
Beweisen Sie, dass für $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch

$$M_\varphi : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \varphi \cdot f \end{cases}$$

ein Multiplikationsoperator auf $L^2(\mathbb{R})$ definiert wird, der symmetrisch ist und

$$\sigma(M_\varphi) = \left\{\mu \in \mathbb{R} \colon \lambda\left(\varphi^{-1}([\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon])\right) > 0 \quad (\varepsilon > 0)\right\} \tag{$*$}$$

erfüllt. (λ ist das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$.)
Zeigen Sie, dass sich für $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein Funktionalkalkül mittels

$$f(M_\varphi) := M_{f \circ \varphi} \quad (f \in L^\infty(\sigma(M_\varphi)))$$

definieren lässt, der für $f \in \mathcal{L}$ mit dem Funktionalkalkül aus Kapitel 9 übereinstimmt. Verifizieren Sie desweiteren den Spektralabbildungssatz

$$\sigma(f(M_\varphi)) = f(\sigma(M_\varphi)) \quad (f \in C(\sigma(M_\varphi)))$$

unter Zuhilfenahme von $(*)$. Gilt sogar

$$\sigma(f(M_\varphi)) = f(\sigma(M_\varphi)) \quad (f \in L^\infty(\sigma(M_\varphi)))?$$