Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2014
Institut für Analysis 29.05.2014
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Carlos Hauser

Spektraltheorie

7. Übungsblatt

Aufgabe 25
Seien $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine hermitesche, positiv definite Matrix. Zu A gehört eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, die durch

$$\psi x := Ax \quad (x \in \mathbb{C}^n)$$

gegeben ist.

(a) Aus der Linearen Algebra ist bekannt: Es existiert eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sodass $A = S^{-1}DS$ mit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } \sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq [0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass $f(\psi) \in L(\mathbb{C}^n)$ durch $f(\psi)x := Bx \quad (x \in \mathbb{C}^n)$ mit $B := S^{-1}\widetilde{D}S$ und

$$\widetilde{D} := \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(b) Berechnen Sie $f(\psi)$ für das Beispiel $f(t) := \sqrt{t}$, und $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 26
Zu einer Folge $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \in l^2$ sei der Multiplikationsoperator $A\colon l^2 \to l^2$ gegeben durch

$$Ax := (\alpha_n x_n)_{n=1}^\infty \quad \left(x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^2\right).$$

Welche Bedingungen an (α_n) muss man stellen, damit A symmetrisch bzw. positiv ist? Zeigen Sie, dass wenn $A \geq 0$ und $\alpha_n \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ist, überabzählbar viele symmetrische Operatoren $B\colon l^2 \to l^2$ mit $B^2 = A$ existieren.

Aufgabe 27

Seien H ein komplexer Hilbertraum, $A \in L(H)$ symmetrisch und $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar von A. Zeigen Sie für $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $(A - \lambda I)E_\lambda \leq 0$ und $(A - \lambda I)(I - E_\lambda) \geq 0$.

(b) Für $x \in E_\lambda(H)$ ist $(Ax, x) \leq \lambda(x, x)$.

(c) Für $x \in N(E_\lambda)$ ist $(Ax, x) \geq \lambda(x, x)$.

(d) Ist $x \in N(E_\lambda)$, $x \neq 0$, so gilt $(Ax, x) > \lambda(x, x)$.
Hinweis: Stellen Sie (Ax, x) über den Spektralsatz dar und teilen Sie das entstehende Integral an der Stelle λ.

Aufgabe 28

Seien H ein komplexer Hilberraum, $A \in L(H)$ symmetrisch und $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar von A.

(a) Zeigen Sie, dass für $B \in L(H)$ Folgendes gilt:

$$AB = BA \iff BE_\lambda = E_\lambda B \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Hinweis zu „$\Leftarrow$“: Mit Hilfe des Spektralsatzes lässt sich A durch Linearkombinationen der E_λ approximieren.

(b) Zeigen Sie, dass zu A zwei positive, symmetrische Operatoren $A^+, A^- \colon H \to H$ existieren, die folgende Eigenschaften besitzen:

(i) $A = A^+ - A^-$ und $A^+A^- = A^-A^+ = 0$.

(ii) Sei P die Orthogonalprojektion auf $N(A^+)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}&AB = BA \text{ für ein symmetrisches } B \in L(H) \Longrightarrow BP = PB \text{ und}\\ &A^+P = PA^+ = 0, \quad A^-P = PA^- = A^-.\end{aligned}$$