Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2014
05.06.2014

Spektraltheorie

8. Übungsblatt

Aufgabe 29
Seien H ein komplexer Hilbertraum und $A \in L(H)$ symmetrisch. Zudem seien $m := m(A) = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$ und $M := M(A) = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$.

(a) Zeigen Sie für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$:

$$m(A + \lambda I) = m + \lambda, \quad M(A + \lambda I) = M + \lambda, \quad m(\beta A) = \beta m,$$
$$M(\beta A) = \beta M, \quad m(-A) = -M, \quad M(-A) = -m.$$

(b) Zeigen Sie:

(i) $m = \min_{\|x\|=1} (Ax, x) \Longleftrightarrow m \in \sigma_p(A)$.
Hinweis zu „$\Rightarrow$“: Die Aussage von Aufgabe 27(d) kann hilfreich sein.

(ii) $M = \max_{\|x\|=1} (Ax, x) \Longleftrightarrow M \in \sigma_p(A)$.

Aufgabe 30
Sei H ein komplexer, nicht-separabler Hilbertraum. Zeigen Sie:

$$\mathcal{I} := \{A \in L(H) \colon A(H) \text{ ist separabel}\}$$

ist ein abgeschlossenes Ideal in $L(H)$ mit

$$\mathcal{K}(H) \subsetneq \mathcal{I} \subsetneq L(H).$$

Aufgabe 31
Seien H ein komplexer Hilbertraum und $U \in L(H)$ ein unitärer Operator mit $\sigma(U) = \partial\mathbb{D}$. Zeigen Sie, dass

$$\left\|p(U) - U^{-1}\right\| \geq 1$$

für jedes Polynom p mit komplexen Koeffizienten gilt.

Aufgabe 32

(a) Für festes $a \in \mathbb{R}$ sei $U \in L\big(L^2(\mathbb{R})\big)$ gegeben durch

$$(Uf)(t) := f(t+a) \quad \text{f.f.a. } t \in \mathbb{R} \quad (f \in L^2(\mathbb{R})).$$

Zeigen Sie, dass U unitär ist.

(b) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $\zeta \in \mathbb{R}$ sei $U\colon L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ definiert durch

$$(Uf)(t) := \mathrm{e}^{i\zeta t} f(t) \quad \text{f.f.a. } t \in (a,b) \quad (f \in L^2(a,b)).$$

Zeigen Sie, dass U ein unitärer Operator ist.