Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Carlos Hauser

SS 2014
12.06.2014

Spektraltheorie

9. Übungsblatt

Aufgabe 33
Gegeben sei der Operator

$$T\colon \begin{cases} D(T) \subseteq C([0,1]) \to C([0,1]) \\ \qquad\qquad f \mapsto f'(0) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]} \end{cases}$$

mit $D(T) := C^1([0,1])$. Zeigen Sie:

(a) T ist nicht abschließbar.

(b) $T' \equiv 0$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $D(T') = \{g \in C([0,1])' \colon \langle \mathbb{1}_{[0,1]}, g\rangle = 0\}$.

Aufgabe 34
Sei T der eindimensionale Laplace-Operator

$$T\colon \begin{cases} D(T) \subseteq L^2[-1,1] \to L^2[-1,1] \\ \qquad\qquad u \mapsto u'' \end{cases}$$

auf $D(T) := \{u \in C^2([-1,1]) \colon u(-1) = u(1) = 0\}$. Zeigen Sie, dass T symmetrisch, aber nicht selbstadjungiert ist.
Hinweis zur Selbstadjungiertheit: Finden Sie eine Funktion $v \in D(T^*)\backslash D(T)$. *Versuchen Sie es z.B. mit*

$$v(t) := \begin{cases} t + t^2, & t \in [-1,0), \\ t - t^2, & t \in [0,1]. \end{cases}$$

Aufgabe 35
Seien H ein komplexer Hilbertraum und $T\colon D(T) \subseteq H \to H$ ein dicht definierter, linearer Operator. Zeigen Sie:

(a) Sei $V\colon H \times H \to H \times H$ definiert durch $V((x,y)) := (-y,x)$ für alle $x,y \in H$. Dann gilt $G(T^*) = (VG(T))^{\perp}$.

(b) Falls T abgeschlossen ist, gilt $H \times H = VG(T) \oplus G(T^*)$.

(c) Ist T abgeschlossen, so ist T^* dicht definiert und $T = T^{**}$.

Aufgabe 36
Seien H ein komplexer Hilbertraum und $T\colon D(T) \subseteq H \to H$ ein symmetrischer, dicht definierter Operator. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) T ist selbstadjungiert.

(b) T ist abgeschlossen und $N(T^* \pm iI) = \{0\}$.

(c) $(T \pm iI)(D(T)) = H$.