Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Variationsmethoden – Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung zu den hinreichenden Bedingungen

$$L[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \to \min$$

für Konkurrenzfunktionen $y \in M = \{y \in C^1_s[a,b] : y(a) = y_a, y(b) = y_b)\}$.

- Sei $f(x,y,p)$ konvex in (y,p). Falls $y_0 \in M \cap C^2_s[a,b]$ die Euler-Lagrange Gleichung

  $$\frac{d}{dx}\Big(f_p(x, y_0(x), y_0'(x))\Big) = f_y(x, y_0(x), y_0'(x))$$

  auf den Intervallen (x_{i-1}, x_i) sowie die 1. Erdmann-Bedingung in den Punkten x_i erfüllt, dann ist y_0 ein globaler Minimierer.

- (hinreichende Weierstraß Bedingung) Falls gilt:

  (1) $\tilde{y}(x,\alpha)$ ist ein Extremalenfeld mit Feld G und Gefälle $p(x,y)$,

  (2) y_0 ist in $\tilde{y}$ eingebettet,

  (3) G ist offen und einfach zusammenhängend,

  (4) $\mathcal{E}(x,y,p(x,y),q) \geq 0$ für alle $(x,y,q) \in G \times \mathbb{R}$

  Dann gilt $L[y] \geq L[y_0]$ für alle $y \in M$ mit graph $(y) \subset G$.

- (lokale hinreichende Weierstraß Bedingung) Falls gilt:

  (1) $y_0 \in C^2[a,b]$ mit $y(a) = y_a, y(b) = y_b$ ist reguläre Lösung der Euler-Lagrange Gleichung,

  (2) In $(a,b]$ gibt es keinen zu a konjugierten Punkt,

  (3) $\exists \epsilon > 0$: $\mathcal{E}(x,y,p,q) \geq 0$ für alle $q \in \mathbb{R}$ und für alle $(x,y,p) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$ mit $|y - y_0(x)| < \epsilon, |p - y_0'(x)| < \epsilon$

  dann ist y_0 starker relativer Minimierer.

- (lokale hinreichende Legendre Bedingung) Falls (1)-(2) gilt wie vorher und

  (3)' $\exists \epsilon > 0$: $f_{pp}(x,y,p) \geq 0$ für alle $(x,y,p) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$ mit $|y - y_0(x)| < \epsilon$, $|p - y_0'(x)| < \epsilon$

  dann ist y_0 schwacher relativer Minimierer.