Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Variationsmethoden – Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung zu den notwendigen Bedingungen

$$L[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx \to \min$$

für Konkurrenzfunktionen $y \in M = \{y \in C^1_s[a,b] : y(a) = y_a, y(b) = y_b)\}$.

- Falls $y_0 \in M \cap C^2[a,b]$ schwacher relativer Minimierer mit C^1-Konkurrenzfunktionen ist, dann gilt die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dx}\Big(f_p(x, y_0(x), y_0'(x))\Big) = f_y(x, y_0(x), y_0'(x))$$

- Falls $y_0 \in M$ starker relativer Minimierer ist, dann gilt:
  (i) Euler-Lagrange Gleichung dort wo y_0 C^1-ist
  (ii) 1. Erdmann-Bedingung: $f_p(x, y_0(x), y_0'(x))$ ist stetig
  (iii) 2. Erdmann-Bedingung: $y_0'(x) f_p(x, y_0(x), y_0'(x)) - f(x, y_0(x), y_0'(x))$ ist stetig

- Falls $y_0 \in M$ starker relativer Minimierer ist, dann gilt die Weierstraß Bedingung

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x), q) \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}$$

  überall dort, wo y_0 C^1 ist. Dabei ist

$$\mathcal{E}(x, y, p, q) = f(x, y, q) - f(x, y, p) - f_p(x, y, p)(q - p)$$

  die Weierstraß-Exzess Funktion.

- Falls $y_0 \in M \cap C^1[a,b]$ schwacher relativer Minimierer ist, dann gilt die Legendre Bedingung:

$$f_{pp}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0 \text{ in } [a,b].$$

- Falls $y_0 \in M \cap C^2[a,b]$ regulärer, schwacher relativer Minimierer ist, dann gilt die Jacobi-Bedingung: in (a,b) gibt es keine zu a konjugierten Punkte.