Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
16.10.2019

Variationsmethoden

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Modellierungen)

(a) **Kürzeste Verbindung auf $\mathbb{S}^2$**
Bestimmen Sie das Variationsproblem für die Kurve minimaler Länge zwischen zwei Punkten auf der Sphäre $\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x|_2 = 1\}$.
Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten $(\cos(\varphi)\cos(\theta), \sin(\varphi)\cos(\theta), \sin(\theta))$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mit $\theta = \theta(\varphi)$.

(b) **Catenaria**
Betrachten Sie eine Kette $(x, y(x))$ mit konstanter Massendichte ρ, welche an den Punkten (a, y_a) und (b, y_b) aufgehängt ist. g bezeichne die Gravitationskonstante. Zeigen Sie, dass das Variationsproblem zur Minimierung der potentiellen Energie gegeben ist durch

$$E_{pot}[y] = g\,\rho \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 2 (starke und schwache relative Minimierer)
Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L[y] := \int_0^1 y'(x)^2 - y(x)^2 y'(x)^4\,\mathrm{d}x\,, \qquad M := \left\{y \in C^1([0,1], \mathbb{R}) \;\middle|\; y(0) = y(1) = 0\right\}.$$

(a) Zeigen Sie: $y_0 \equiv 0$ ist ein schwacher relativer Minimierer.

(b) Zeigen Sie: $y_0 \equiv 0$ ist <u>kein</u> starker relativer Minimierer.

Aufgabe 3
Betrachten Sie das Funktional

$$L[y] := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$$

auf den Mengen

$$\begin{aligned} M &:= \left\{ y \in C^1([a,b],\mathbb{R}) \;\middle|\; y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \right\}, \\ \widetilde{M} &:= \left\{ y \in C([a,b],\mathbb{R}) \;\middle|\; y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \quad y \text{ stückw. stetig diff.bar} \right\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: Für jedes $\varepsilon > 0$ und $y \in \widetilde{M}$ existiert ein $y_\varepsilon \in M$ mit

$$|L[y] - L[y_\varepsilon]| < \varepsilon.$$

(b) Sei $y_0 \in M$ ein absoluter Minimierer von L auf M. Zeigen Sie: Dann ist y_0 auch absoluter Minimierer von L auf $\widetilde{M}$.

Organisatorisches

Übungsblätter

- Das neue Übungsblatt erscheint donnerstags auf der Homepage http://www.math.kit.edu/iana2/edu/varmeth2019w/de
- Besprechung in der Übungsstunde der darauffolgenden Woche.
- Keine Abgabe, keine Korrektur.

Bei Fragen

- Zimmer 3.038, einfach vorbeikommen und klopfen
- E-Mail: simon.kohler@kit.edu