Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
24.10.2019

Variationsmethoden

2. Übungsblatt

Aufgabe 4 (ELG & EEB zu A1 auf ÜB1)

(a) **Kürzeste Verbindung auf $\mathbb{S}^2$**
Seien $0 \leq \varphi_A < \varphi_B < 2\pi$, $\theta_A, \theta_B \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mit $|\theta_B - \theta_A| < \frac{\pi}{2}$. Betrachten Sie das Variationsproblem

$$\begin{cases} L\left[\theta\right] = \displaystyle\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\cos(\theta(\varphi))^2 + \theta'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi\,, \\ M = \left\{\theta \in C(\left[\varphi_A, \varphi_B\right], \mathbb{R}) \mid \theta \text{ stückw. } C^1,\ \theta(\varphi_A) = \theta_A,\ \theta(\varphi_B) = \theta_B\right\}. \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung.

(ii) Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung. *Hinweis:* Energieerhaltung

(iii) Was besagen die Erdmannschen-Ecken-Bedingungen?

(b) **Catenaria**
Korrektur: "$a < b$, $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ und $y(a) = y_a,\ y(b) = y_b$ in M" geändert zu "$a, h > 0$ und $y(-a) = h,\ y(a) = h,\ y \geq 0$ in M".
Seien $a, h > 0$, $g, \rho > 0$. Betrachten Sie das Variationsproblem

$$\begin{cases} L\left[y\right] = g\,\rho \displaystyle\int_{-a}^{a} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x\,, \\ M = \left\{y \in C(\left[-a, a\right], \mathbb{R}) \mid y \text{ stückw. } C^1,\ y(-a) = h,\ y(a) = h,\ y \geq 0\right\}. \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung.

(ii) Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung. *Hinweis:* Energieerhaltung

(iii) Was besagen die Erdmannschen-Ecken-Bedingungen?

Aufgabe 5 (Lösung ELG+RB $\not\Rightarrow$ Minimierer)
Betrachten Sie das Variationsproblem

$$\begin{cases} L\,[y] = \displaystyle\int_0^3 y'(x)^2\,(1-y'(x))^2\,\mathrm{d}x\,, \\ M = \left\{y \in C([0,3]\,,\mathbb{R}) \mid y \text{ stückw. } C^1,\ y(0)=0,\ y(3)=1\right\}. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die absoluten Minimierer von L auf M und verifizieren sie die Erdmannschen-Ecken-Bedingungen.

(b) Finden Sie $z_0 \in C^1([0,3]\,,\mathbb{R})$ mit: $z_0(0)=0, z_0(3)=1$ und z_0 löst die Euler-Lagrange-Gleichung. Zeigen Sie: z_0 ist kein starker relativer Minimierer.

Aufgabe 6 (Lösung ELG+RB+EEB & Struktur $\Rightarrow$ Minimierer)
Betrachten Sie die Variationsprobleme

$$(a)\begin{cases} L\,[y] = \displaystyle\int_1^2 x^2 y'(x)^2\,\mathrm{d}x\,, \\ M = \left\{y \in C([1,2]\,,\mathbb{R}) \mid y \text{ stückw. } C^1,\ y(1)=1,\ y(2)=1/2\right\}. \end{cases}$$

$$(b)\begin{cases} L\,[y] = \displaystyle\int_0^1 y(x)^2 + y'(x)^2 + 2y(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,, \\ M = \left\{y \in C([0,1]\,,\mathbb{R}) \mid y \text{ stückw. } C^1,\ y(0)=0,\ y(1)=\mathrm{e}\right\}. \end{cases}$$

Finden Sie jeweils eine Lösung y_0 der Euler-Lagrange-Gleichung mit den gegebenen Randbedingungen, verifizieren Sie die Erdmannschen-Ecken-Bedingungen und zeigen sie dann, dass y_0 ein absoluter Minimierer ist.