Variationsmethoden ÜB ②

A4 (ELG & EEB zu A1 auf ÜB 1)

a) Seien $0 \le \varphi_A < \varphi_B < 2\pi$, $\theta_A, \theta_B \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $|\theta_A - \theta_B| \le \frac{\pi}{2}$,

$$L[\theta] = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\cos^2\theta(\varphi) + \theta'(\varphi)^2}\, d\varphi, \quad M = \{\theta \in C([\varphi_A, \varphi_B], \mathbb{R}) \mid \theta \text{ stückw. } C^1, \theta(\varphi_A) = \theta_A, \theta(\varphi_B) = \theta_B\}$$

(i) Beh: Die Euler-Lagrange-Bedingung ist gegeben durch:

$$\theta''(\varphi) + 2\tan\theta(\varphi)\cdot\theta'(\varphi)^2 + \sin\theta(\varphi)\cos\theta(\varphi)$$

(ii) Beh: Die Lösung der ELG ist gegeben durch:

$$\theta_0(\varphi) = \arctan\left(\sqrt{\tfrac{1-c^2}{c^2}}\sin(\varphi+d)\right) \text{ mit } \tan d = \frac{\tan\theta_B \sin\varphi_A - \tan\theta_A \sin\varphi_B}{\tan\theta_A\cos\varphi_B - \tan\theta_B\cos\varphi_A}, \quad c = \sqrt{\left(1 + \frac{\tan^2\theta_A}{\sin^2(\varphi_A+d)}\right)^{-1}}$$

(iii) Beh: Starke Minimierer haben keine Ecken.

Lösungsvorschlag:

(i) Setze $f(x, \theta, p) = \sqrt{\cos^2\theta + p^2}$. Nach VL ist die ELG gegeben durch:

$$0 = \frac{d}{d\varphi} f_p(x, \theta(\varphi), \theta'(\varphi)) - f_\theta(x, \theta(\varphi), \theta'(\varphi))$$

$$= \frac{d}{d\varphi}\frac{\theta'(\varphi)}{\sqrt{\cos^2\theta(\varphi) + \theta'(\varphi)^2}} - \frac{\cos\theta(\varphi)\cdot(-\sin\theta(\varphi))}{\sqrt{\cos^2\theta(\varphi) + \theta'(\varphi)^2}}$$

$$= \frac{\theta''(\varphi)}{\sqrt{\cos^2\theta(\varphi) + \theta'(\varphi)^2}} - \frac{2\cos\theta(\varphi)\cdot(-\sin\theta(\varphi))\cdot\theta'(\varphi)^2 + 2\theta'(\varphi)^2\theta''(\varphi)}{2\sqrt{\cos^2\theta(\varphi) + \theta'(\varphi)^2}^3} + \frac{\cos\theta(\varphi)\sin\theta(\varphi)}{\sqrt{\cos^2\theta(\varphi) + \theta'(\varphi)^2}}$$

$$\iff 0 = \theta''(\varphi)\cdot\left(\cos^2\theta(\varphi) + \theta'(\varphi)^2\right) + \cos\theta(\varphi)\sin\theta(\varphi)\cdot\theta'(\varphi)^2 - \theta'(\varphi)^2\theta''(\varphi) + \cos\theta(\varphi)\sin\theta(\varphi)\left(\cos^2\theta(\varphi) + \theta'(\varphi)^2\right)$$

$$= \cos^2\theta(\varphi)\cdot\theta''(\varphi) + 2\cos\theta(\varphi)\sin\theta(\varphi)\,\theta'(\varphi)^2 + \sin\theta(\varphi)\cos^3\theta(\varphi)$$

$$\iff 0 = \theta''(\varphi) + 2\tan\theta(\varphi)\,\theta'(\varphi)^2 + \sin\theta(\varphi)\cos\theta(\varphi)$$

(ii) Nach Energieerhaltung existiert $c \in \mathbb{R}$ mit:

$$-c \equiv \theta'(\varphi) f_p(\theta(\varphi), \theta'(\varphi)) - f(\theta(\varphi), \theta'(\varphi))$$

$$= \theta'(\varphi)\cdot\frac{\theta'(\varphi)}{\sqrt{\cos^2\theta(\varphi) + \theta'(\varphi)^2}} - \sqrt{\cos^2\theta + \theta'(\varphi)^2}$$

$$= \left(\theta'(\varphi)^2 - \cos^2\theta - \theta'(\varphi)^2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + \theta'(\varphi)^2}}$$

$$= \frac{-\cos^2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \theta'(\varphi)^2}} \qquad \text{also } c \in (0,1)$$

$$\iff +\cos^2\theta = c\cdot\sqrt{\cos^2\theta(\varphi) + \theta'(\varphi)^2}$$

$$\iff \theta'(\varphi)^2 = \frac{1}{c^2}\cos^4\theta(\varphi) - \cos^2\theta(\varphi)$$

$$\iff \theta'(\varphi) = \pm\frac{\cos\theta(\varphi)}{c}\sqrt{\cos^2\theta(\varphi) - c^2}$$

Betrachte „+":

$$\theta' = \frac{\cos\theta}{c}\sqrt{\cos^2\theta - c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta - c^2}}\,d\theta = d\varphi$$

$$\Rightarrow \varphi + d = \int d\varphi = \int \frac{c}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta - c^2}}\,d\theta$$

$$s = \tan\theta = \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \sqrt{\frac{1}{1+s^2}}$$

$$ds = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \Leftrightarrow d\theta = \frac{1}{1+s^2}\,ds$$

$$= \int c\cdot\sqrt{1+s^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+s^2} - c^2}}\cdot\frac{1}{1+s^2}\,ds$$

$$= \int \frac{c}{\sqrt{1 - c^2(1+s^2)}}\,ds$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{c^2} - 1\right) - s^2}}\,ds$$

$$s = \sqrt{\frac{1-c^2}{c^2}}\,t \Rightarrow ds = \sqrt{\frac{1-c^2}{c^2}}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1-c^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-t^2}}\cdot\sqrt{\frac{1-c^2}{c^2}}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin(t)$$

$$= \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,s\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\tan\theta\right)$$

$$\Leftrightarrow \theta_0 = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\cdot\sin(\varphi + d)\right)$$

Bestimme c und d aus Randbedingungen:

$$\tan\theta_A = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\sin(\varphi_A + d) \quad \& \quad \tan\theta_B = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\sin(\varphi_B + d)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\theta_A}{\sin(\varphi_A + d)} = \frac{\sqrt{1-c^2}}{c} = \frac{\tan\theta_B}{\sin(\varphi_B + d)}$$

$$\Rightarrow \tan\theta_A\cdot(\sin\varphi_B\cos d + \cos\varphi_B\sin d) = \tan\theta_B\,(\sin\varphi_A\cos d + \cos\varphi_A\sin d)$$

$$\Rightarrow \tan\theta_A\cdot(\sin\varphi_B + \cos\varphi_B\tan d) = \tan\theta_B\,(\sin\varphi_A + \cos\varphi_A\tan d)$$

$$\Rightarrow (\tan\theta_A\cos\varphi_B - \tan\theta_B\cos\varphi_A)\tan d = \tan\theta_B\sin\varphi_A - \tan\theta_A\sin\varphi_B$$

$$\Rightarrow \tan d = \frac{\tan\theta_B\sin\varphi_A - \tan\theta_A\sin\varphi_B}{\tan\theta_A\cos\varphi_B - \tan\theta_B\cos\varphi_A}$$

Berechne c: $\frac{1}{c^2} - 1 = \frac{\tan^2\theta_A}{\sin^2(\varphi_A + d)} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{1}{\frac{\tan^2\theta_A}{\sin^2(\varphi_A+d)} + 1}}$.

(iii) Potentielle Ecke: $\theta(x_i) = \bar\theta$, $\theta'(\varphi_i^-) = p^-$, $\theta'(\varphi_i^+) = p^+$

EEB 1: $f_p(\varphi, \theta(\varphi), \theta'(\varphi)) = \frac{\theta'(\varphi)}{\sqrt{\cos^2\theta(\varphi) + \theta'(\varphi)^2}}$ stetig

$$\Rightarrow \frac{p^-}{\sqrt{\cos^2\bar\theta + p^{-2}}} = \frac{p^+}{\sqrt{\cos^2\bar\theta + p^{+2}}}$$

(Bem: $p \mapsto \frac{p}{\sqrt{\cos^2\bar\theta + p^2}}$ streng monoton wachsend, da $|\bar\theta| < \frac{\pi}{2}$)

$$\Leftrightarrow p^- = p^+$$

d.h. keine Ecken möglich

EEB 2:

$$f(1,\Theta(\rho),\Theta'(\rho)) - f_p(\rho,\Theta(\rho),\Theta'(\rho))\,\Theta'(\rho) = \sqrt{\cos^2\Theta+\Theta'^2} - \frac{\Theta'^2}{\sqrt{\cos^2\Theta+\Theta'^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^2\Theta+\Theta'^2}}\cdot(\cos^2\Theta+\Theta'^2-\Theta'^2) = \frac{\cos^2\Theta}{\sqrt{\cos^2\Theta+\Theta'^2}} \quad \text{stetig}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\bar\Theta}{\sqrt{\cos^2\bar\Theta+p^{-2}}} = \frac{\cos^2\bar\Theta}{\sqrt{\cos^2\bar\Theta+p^{+2}}} \iff |p^+| = |p^-|$$

d.h. höchstens „symmetrische" Ecken ($p^+=-p^-$) möglich

(aber haben schon „keine Ecken" aus EEB 1)

b) Seien $a,h>0$, $g,\rho>0$, $L[y]=\int_{-a}^{a} y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$

$M=\{y\in C^1_s([-a,a],\mathbb{R}) \mid y\geq 0,\ y(-a)=h=y(a)\}$

(i) Beh: ELG: $y(x)\cdot y''(x)-y'(x)^2-1=0$

(ii) Beh: Lösung ELG + RB: $y(x)=c\cdot\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ mit c löst $\frac{h}{a}=\frac{c}{a}\cdot\cosh\left(\frac{a}{c}\right)$

(iii) Beh: starke Minimierer können keine Ecken haben.

Lösungsvorschlag:

(i) Setze $f(y,p)=y\sqrt{1+p^2}$. Nach VL ist die ELG gegeben durch:

$$0=\frac{d}{dx}f_p(y(x),y'(x)) - f_y(y(x),y'(x))$$

$$=\frac{d}{dx}\left(y(x)\cdot\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\right)-\sqrt{1+y'(x)^2}$$

$$=y'(x)\cdot\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}+y(x)\cdot\frac{y''(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}-y(x)\frac{y'(x)\cdot 2y'(x)y''(x)}{2\sqrt{1+y'(x)^2}^3}-\sqrt{1+y'(x)^2}$$

$$\iff 0=y'(x)^2(1+y'(x)^2)+y(x)y''(x)(1+y'(x)^2)-y(x)y'(x)^2y''(x)-(1+y'(x)^2)^2$$
$$= y'(x)^2+y'(x)^4+y(x)y''(x)+y(x)y'(x)^2y''(x)-y(x)y'(x)^2y''(x)-1-2y'(x)^2-y'(x)^4$$

$$=y(x)\cdot y''(x)-y'(x)^2-1$$

(ii) Nach Energieerhaltung ex $c\in\mathbb{R}$ so dass:

$$c\equiv f(y(x),y'(x))-f_p(y(x),y'(x))\cdot y'(x)$$
$$=y(x)\cdot\sqrt{1+y'(x)^2}-y(x)\cdot\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\cdot y'(x)$$

$$\iff c\cdot\sqrt{1+y'(x)^2}=y(x)\cdot(1+y'(x)^2)-y(x)\cdot y'(x)^2=y(x)$$

d.h. $c>0$

$$\Rightarrow 1+y'(x)^2=\frac{1}{c^2}y(x)^2$$

$$\iff y'(x)=\pm\sqrt{\frac{1}{c^2}y(x)^2-1}=\pm\sqrt{\frac{y(x)^2-c^2}{c^2}}$$

Betrachte „+":

$$\frac{c}{\sqrt{y^2-c^2}}\,dy = dx$$

$$\Rightarrow \quad x+d = \int dx = \int \frac{c}{\sqrt{y^2-c^2}}\,dy \qquad\qquad y = c\cdot\cosh(s) \Rightarrow dy = c\cdot\sinh(s)\,ds = c\cdot\sqrt{\cosh^2-1}\,ds$$

$$= \int \frac{c}{\sqrt{c^2\cosh^2(s)-c^2}}\cdot c\sqrt{\cosh^2(s)-1}\,ds \qquad\qquad s = \operatorname{arcosh}\frac{y}{c}$$

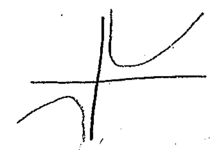
$$= c\cdot\int ds = c\cdot s$$

$$= c\cdot\operatorname{arcosh}\left(\frac{y}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = c\cdot\cosh\left(\frac{x+d}{c}\right)$$

Randbedingungen:

$$y(-a) = c\cdot\cosh\left(\frac{-a+d}{c}\right) \overset{!}{=} h = c\cdot\cosh\left(\frac{a+d}{c}\right) = y(a)$$



$$\Rightarrow \quad d = 0 \quad \& \quad \frac{h}{a} = \frac{c}{a}\cdot\cosh\left(\frac{a}{c}\right)$$

Sei $K > 0$ mit $\left(\frac{1}{x}\cdot\cosh(x)\right)'\Big|_{x=K} = 0$. $\quad (K \approx 1{,}3968)$

Falls $\frac{h}{a} < K \Rightarrow$ keine Lsg

$\frac{h}{a} = K \Rightarrow$ eine Lsg

$\frac{h}{a} > K \Rightarrow$ zwei Lsg

} Modellierung: Wahl des Wertes „$y=0$" (Seil soll im „positiven" hängen)

$$\Rightarrow \quad y_0(x) = c\cdot\cosh\left(\frac{x}{c}\right) \quad \text{mit } \frac{c}{a} \text{ löst } \frac{h}{a} = \frac{c}{a}\cosh\left(\frac{a}{c}\right).$$

Eckenbed:

Potentielle Ecke: $y'(x_i^-) = p^-$, $y'(x_i^+) = p^+$, $y(x_i) = \bar{y}_i \geq 0$

EEB 1: $f_p(x, y(x), y'(x)) = \frac{y(x)\cdot y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}$ stetig

$$\Rightarrow \quad \bar{y}\cdot\frac{p^-}{\sqrt{1+p^{-2}}} \overset{!}{=} \bar{y}\,\frac{p^+}{\sqrt{1+p^{+2}}} \qquad \left(p \mapsto \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \text{ streng mon wachsend}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{y} = 0 \text{ oder } p^- = p^+$$

d.h. Seil kann nur Ecken haben, wenn es aufliegt.

EEB2: $f(x, y(x), y'(x)) - f_p(x, y(x), y'(x))\cdot y'(x) = y(x)\cdot\sqrt{1+y'(x)^2} - \frac{y(x)\cdot y'(x)^2}{\sqrt{1+y'(x)^2}}$

$$= \frac{y(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\cdot\left(y(x)\cdot(1+y'(x)^2) - y(x)\,y'(x)^2\right) = \frac{y(x)^2}{\sqrt{1+y'(x)^2}} \quad \text{stetig}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\bar{y}^2}{\sqrt{1+p^{-2}}} \overset{!}{=} \frac{\bar{y}^2}{\sqrt{1+p^{+2}}} \Leftrightarrow \bar{y} = 0 \text{ oder } p^- = p^+ \quad \text{siehe oben}$$

$\boxed{A5}$ Betrachte $L[y]=\int_0^3 y'(x)^2(1-y'(x))^2\,dx$, $M=\{y\in C([0,3],\mathbb{R}) \mid y$ stückw. $C^1, y(0)=0, y(3)=1\}$ ÜB2 5/7

a) Beh: Die absoluten Minimierer von L auf M sind gegeben durch

$$m_{abs}=\{y\in M \mid \forall x\in[0,3]\cap\{y \text{ db in } x\}: y'(x)\in\{0,+1\}\}.$$

Ferner sind für jedes $y\in m_{abs}$ die EEB erfüllt.

b) Setze $z_0(x)=\frac{1}{3}x$

Beh: $z_0 \in C^1$ löst die ELG+RB, aber z_0 ist kein starker rel Minimierer.

Lösungsvorschlag:

a) Klar: $\forall y\in M: L[y]\geq 0$

Sei $y\in m_{abs}$. Dann: $y'(x)\in\{0,+1\}$ f.f.a $x\in[0,3] \Rightarrow y'(x)^2\cdot(1-y'(x))^2=0$ f.f.a $x\in[0,3]$

$\Rightarrow L[y]=0 \Rightarrow y$ abs Minimierer.

Setze $f(p)=p^2\cdot(1-p)^2$. Dann:

EEB 1: $f_p^0(y'(x)) = 2y'(x)\cdot(1-y'(x))^2+y'(x)^2\cdot 2(1-y'(x))\cdot(-1) \overset{y\in m_{abs}}{\equiv} 0$ ist stetig

EEB 2: $f^0(y'(x)) - f_p^0(y'(x))\cdot y'(x) \overset{EEB1}{=} y'(x)\cdot(1-y'(x))^2 - 0\cdot y'(x) \overset{y\in m_{abs}}{\equiv} 0$ ist stetig

b) ELG:

$$0=\frac{d}{dx} f_p(z_0'(x)) - f_y(z'(x)) = \frac{d}{dx}\left(2z_0'(x)\cdot(1-z_0'(x))^2 - 2z_0'(x)^2\cdot(1-z_0'(x))\right)$$

$\Rightarrow c \equiv z_0'(x)-2z_0'(x)^2+z_0'(x)^3-z_0'(x)^2+z_0'(x)^3$

$\Leftrightarrow 2z_0'(x)^3-3z_0'(x)^2+z_0'(x)-c=0$

d.h. $z_0'(x)$ ist NST des Polynoms $t\mapsto 2t^3-3t^2+t-c$, welches nur endlich viele Nullstellen hat. Da z_0' stetig sein soll, muss $z_0'\equiv \text{const}$

$\Rightarrow z_0(x)=z_0(0)+z_0'(0)\cdot(x-0)$ & $z_0(3)=1$, $z_0(0)=0$

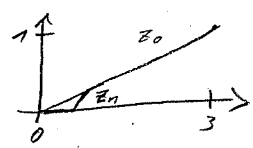
$\Rightarrow z_0(x)=\frac{1}{3}x$

Teste ELG: $2\cdot\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3})^2-2\cdot(\frac{1}{3})^2\cdot(1-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}-2\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\equiv \text{const}$ ✓

Setze

$$z_n(x):=\begin{cases}0, & x\in[0,\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n})\\ x-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}, & x\in[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n},\frac{1}{n})\\ z_0(x), & x\in[\frac{1}{n},3)\end{cases}$$

Klar: $z_n\in M$



$$\|z_n-z_0\|_\infty=\sup_{x\in[0,1/n]}|z_n(x)-z_0(x)|=\sup_{x\in[0,1/n]}\begin{cases}\frac{1}{3}\cdot x, & x\in[0,\frac{2}{3n})\\ \frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{n}-x), & x\in[\frac{2}{3n},\frac{1}{n}]\end{cases}$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$L[z_0]=\int_0^3(\frac{1}{3})^2\cdot(1-\frac{1}{3})^2\,dx=3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{27}$

$L[z_n]=\int_{1/n}^3(\frac{1}{3})^2\cdot(1-\frac{1}{3})^2\,dx=(3-\frac{1}{n})\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{27}-\frac{4}{81}\cdot\frac{1}{n}<L[z_0]$ //

A6 | ÜB 2 6/7

a) $L[y] = \int_1^2 x^2 y'(x)^2 \, dx$, $M = \{y \in C([1,2],\mathbb{R}) \mid y$ stückw. C^1, $y(1)=1$, $y(2)=1/2\}$

Beh.: $y_0(x) = 1/x$ löst ELG + RB, erfüllt EEB und ist abs Minimierer.

b) $L[y] = \int_0^1 y(x)^2 + y'(x)^2 + 2y(x)e^x \, dx$, $M = \{y \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid y$ stückw. C^1, $y(0)=0$, $y(1)=e\}$

Beh.: $y_0(x) = \frac{e^2}{e^2-1}\sinh(x) + \frac{x}{2}e^x$ löst ELG + RB, erfüllt EEB und ist abs. Minimierer.

Lösungsvorschlag:

a) Betrachte $f(x,p) = x^2 p^2$: ELG nach VL:

$$0 = \frac{d}{dx} f_p(x, y'(x)) - f_y(x, y(x)) = \frac{d}{dx} x^2 \cdot 2y'(x) - 0$$

$$\Leftrightarrow c \equiv 2x^2 \cdot y'(x) \Leftrightarrow y'(x) = \frac{c}{2x^2} \Leftrightarrow y(x) = -\frac{c}{2x} + d$$

Randbedingungen:

$$1 \stackrel{!}{=} y(1) = -\frac{c}{2} + d \quad \& \quad \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} y(2) = -\frac{c}{4} + d$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{y_0(x) = \frac{1}{x}}$$

y_0 ist C^1 $\Rightarrow$ y_0 erfüllt EEB

(EEB 1: $f_p^0(x) = x^2 \cdot 2y_0'(x) = x^2 \cdot 2 \cdot \frac{-1}{x^2} = -2$ ✓

EEB 2: $f^0(x) - f_p^0(x) \cdot y_0'(x) = x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 - (-2) \cdot \frac{-1}{x^2} = 1 - \frac{2}{x^2}$ ✓)

Sei $y \in M$ bel. Setze $\varphi := y - y_0$, d.h. $\varphi \in C_s^1$ & $\varphi(1) = \varphi(2) = 0$. Dann

$$L[y] = L[y - y_0 + y_0] = L[\varphi + y_0]$$

$$= \int_1^2 x^2 \cdot (\varphi'(x) + y_0'(x))^2 \, dx$$

$$= \int_1^2 x^2 \varphi'(x)^2 + 2x^2 \cdot \varphi'(x) \cdot y_0'(x) + x^2 y_0'(x)^2 \, dx$$

$$= L[\varphi] + 2\int_1^2 x^2 \cdot \varphi'(x) \cdot \frac{-1}{x^2} dx + L[y_0]$$

$$= \underbrace{L[\varphi]}_{\geq 0} - 2 \cdot (\underbrace{\varphi(2)}_{=0} - \underbrace{\varphi(1)}_{=0}) + L[y_0]$$

$$\geq 0 - 0 + L[y_0]$$

$\Rightarrow$ y_0 absoluter Minimierer

(Alternative: $f(x,y,p) = x^2 p^2$ konvex in p nutze Satz aus VL)

b) Schreibe $f(x,y,p) = y^2 + p^2 + 2y \cdot e^x$. <u>ELG</u> nach VL: ÜB2 7/7

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dx} f_p(x, y(x), y'(x)) - f_y(x, y(x), y'(x))$$
$$= \frac{d}{dx}(2y'(x)) - (2y(x) + 2e^x)$$
$$= 2 \cdot (y''(x) - y(x) - e^x)$$
$$\Leftrightarrow \quad y''(x) - y(x) = e^x$$
$$\Leftrightarrow \quad y(x) = ce^x + de^{-x} + \frac{x}{2}e^x$$

<u>Randbedingungen:</u>

$$0 \overset{!}{=} y(0) = c + d + 0 \quad \& \quad e \overset{!}{=} y(1) = c \cdot e + d \cdot \frac{1}{e} + \frac{1}{2}e$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & 1/e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2\, e \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{e} - e}\begin{pmatrix} 1/e & -1 \\ -e & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2\, e \end{pmatrix} = \frac{1}{e - \frac{1}{e}}\begin{pmatrix} 1/2\, e \\ -1/2\, e \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{e^2-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_0(x) = \frac{e^2}{e^2-1} \cdot \sinh(x) + \frac{x}{2}e^x}}$$

y_0 ist C^1 $\Rightarrow$ <u>y_0 erfüllt EEB</u>

(EEB 1: $f_p^0(x) = 2y_0'(x) = \frac{2e^2}{e^2-1}\cosh(x) + e^x + xe^x$ ✓

EEB 2: $f^0(x) - f_p^0(x) y_0'(x) = \ldots$ stetig ✓)

Sei $y \in M$ bel. Setze $\varphi := y - y_0$, d.h. $\varphi \in C_s^1$ & $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Dann:

$$L[y] = L[y - y_0 + y_0] = L[\varphi + y_0]$$
$$= \int_0^1 (\varphi + y_0)^2 + (\varphi' + y_0')^2 + 2(\varphi + y_0)e^x \, dx$$
$$= \int_0^1 \varphi^2 + \varphi'^2 + 2\varphi e^x + 2\varphi y_0 + 2\varphi' y_0' + y_0^2 + y_0'^2 + 2y_0 e^x \, dx$$
$$\overset{\text{EEB}}{=} \int_0^1 \varphi^2 + \varphi'^2 + 2\varphi e^x + 2\varphi \cdot \underbrace{(y_0 - y_0'')}_{= -e^x} dx + L[y_0]$$
$$= \int_0^1 \varphi^2 + \varphi'^2 \, dx + L[y_0]$$
$$\geq L[y_0]$$

$\Rightarrow$ y_0 ist abs Minimierer

(Alternative: $f(x,y,p) = y^2 + p^2 + 2ye^x$ konvex in (y,p)

$\rightsquigarrow$ nutze Satz aus VL)