Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
31.10.2019

Variationsmethoden

3. Übungsblatt

Tausch von Vorlesung und Übung KW 44

In KW 44 werden die Vorlesung am Dienstag und die Übung am Freitag getauscht:

Di. 5.11., 08:00 - 09:30 Uhr: Übung
Fr. 8.11., 09:45 - 11:15 Uhr: Vorlesung

Aufgabe 7 (natürliche Randbedingungen)
Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, \mathrm{d}x\,, \qquad M = C^1([a,b],\mathbb{R}) \quad \text{(d.h. keine RB).}$$

(a) Sei $y_0 \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ ein schwacher relativer Minimierer. Zeigen Sie: y_0 erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichung auf $[a,b]$ und die sogenannten "natürlichen Randbedingungen" $f_p(a, y_0(a), y_0'(a)) = 0$, $f_p(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0$.

(b) Sei f konvex in (y,p) für jedes $x \in [a,b]$. Weiter erfülle $y_0 \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ die Euler-Lagrange-Gleichung auf $[a,b]$ und die natürlichen Randbedingungen. Zeigen Sie: y_0 ist absoluter Minimierer von L auf M.

(c) Seien $f(x,y,p) = p^2 + y^2 - 10y\cos(2x)$, $a = 0$, $b = \pi$. Finden Sie einen absoluten Minimierer zum obigen Variationsproblem.
Freiwillige Zusatzfrage: Gibt es mehrere absolute Minimierer?

Aufgabe 8 (Konvexität in $\mathbb{R}^2$)
Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Sei f ist konvex. Zeigen Sie: $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^2\colon t \mapsto f(t\xi)$ ist konvex.

(b) Geben Sie ein Beispiel für: $\forall\, p \in \mathbb{R}\colon y \mapsto f(y,p)$ ist konvex und $\forall\, y \in \mathbb{R}\colon p \mapsto f(y,p)$ ist konvex, aber f ist nicht konvex.

— bitte wenden —

Aufgabe 9 (ein nicht-konvexes Funktional)
Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L\,[y] = \int_0^1 y'(x)^2 + y'(x)^3 \,\mathrm{d}x\,, \qquad M = \left\{ y \in C_s^1([0,1]\,,\mathbb{R}) \mid y(0) = a_0,\ y(1) = a_1 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie die $y \in C_s^1([0,1]\,,\mathbb{R})$, welche die Euler-Lagrange-Gleichung und die Erdmannschen-Ecken-Bedingungen erfüllen. Gibt es solche y mit $y \notin C^1([0,1]\,,\mathbb{R})$?

(b) Für welche a_0, a_1 können zusätzlich die Randbedingungen erfüllt werden?

(c) Zeigen Sie: $\inf_M L = -\infty$.