Variationsmethoden ÜB 3

A7 (natürliche Randbedingungen)

Sei $L[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$, $\quad M = C^1([a,b], \mathbb{R})$.

(i) Sei $y_0 \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ schwacher Minimierer.

<u>Beh:</u> y_0 erfüllt die ELG & „natürlichen RB": $f_p(a, y_0(a), y_0'(a)) = 0 = f_p(b, y_0(b), y_0'(b))$.

(ii) Sei f konvex in (y,p) (für jedes $x \in [a,b]$ fest), sei $y_0 \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ Lösung der ELG und y_0 erfülle die natürlichen Randbedingungen.

<u>Beh:</u> y_0 ist absoluter Minimierer.

(iii) Sei $f(x,y,p) = p^2 + y^2 - 10y \cdot \cos 2x$, $\quad a = 0, b = \pi$.

<u>Beh:</u> Ein absoluter Minimierer von L auf M ist gegeben durch

$y_0(x) =$

<u>Lösungsvorschlag:</u>

(i) Sei $y \in M$ beliebig, setze $\alpha^* := \frac{\varepsilon}{\|y\|_{C^1}}$, sei $\alpha \in (-\alpha^*, \alpha^*)$.

Definiere $y_\alpha := y_0 + \alpha y$, $\Phi(\alpha) := L[y_\alpha]$. Dann: $y_\alpha \in M$ & $\|y_\alpha - y_0\|_{C^1} < \varepsilon$.

Somit: $\Phi(\alpha) = L[y_\alpha] \geq L[y_0] = \Phi(0)$, d.h. Φ hat bei $\alpha = 0$ ein Minimum.

$$\Phi(\alpha) = \int_a^b f(x, y_0(x) + \alpha y(x), y_0'(x) + \alpha y'(x))\, dx$$

$$\Rightarrow \Phi'(\alpha) \overset{\circledast}{=} \int_a^b f_y(x, y_0(x)+\alpha y(x), y_0'(x)+\alpha y'(x)) \cdot y(x) + f_p(x, y_0(x)+\alpha y(x), y_0'(x)+\alpha y'(x))\, y'(x)\, dx$$

$$\Rightarrow 0 = \Phi'(0) = \int_a^b f_y^0(x) \cdot y(x) + f_p^0(x) \cdot y'(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \left(f_y^0(x) - \frac{d}{dx} f_p^0(x)\right) \cdot y(x)\, dx + f_p^0(b) \cdot y(b) - f_p^0(a) \cdot y(a)$$

Zu $\circledast$: Der Integrand ist stetig in α & x und uniform beschränkt in $(\alpha, x) \in [-\frac{\alpha^*}{2}, \frac{\alpha^*}{2}] \times [a,b]$. Nach VL war $\circledast$ erlaubt.

Insbesondere gilt für $y \in C_c^\infty([a,b],\mathbb{R})$ $(\subset M)$:

$$0 = \int_a^b \left(f_y^0(x) - \frac{d}{dx} f_p^0(x)\right) \cdot y(x)\, dx + 0$$

Nach Fundamentallemma also: $f_y^0(x) - \frac{d}{dx} f_p^0(x) = 0$ (ELG).

Damit folgt insbesondere für $y(x) = \frac{f_p^0(b) + f_p^0(a)}{b-a}(x-a) - f_p^0(a)$ $(\in M)$:

$$0 = \int_a^b 0 \cdot y(x)\, dx + f_p^0(b)^2 + f_p^0(a)^2$$

$$\Rightarrow f_p^0(b) = f_p(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0, \quad f_p^0(a) = f_p(a, y_0(a), y_0'(a)) = 0 \quad \text{(n RB)}$$

(ii) Sei $y \in M$ beliebig. Mit Konvexität von f folgt:

$$L[y] - L[y_0] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) - f(x, y_0(x), y_0'(x))\, dx$$

$$\geq \int_a^b f_y(x, y_0(x), y_0'(x)) \cdot (y(x) - y_0(x)) + f_p(x, y_0(x), y_0'(x)) \cdot (y'(x) - y_0'(x))\, dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b \left(f_y^0(x) - \frac{d}{dx} f_p^0(x)\right) \cdot (y(x) - y_0(x))\, dx}_{=0 \quad (ELG)} + \underbrace{f_p^0(b)}_{=0\ (nRB)} \cdot (y(b) - y_0(b)) - \underbrace{f_p^0(a)}_{=0\ (nRB)} \cdot (y(a) - y_0(a))$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ y_0 ist absoluter Minimierer.

(iii) $f(x, y, p) = p^2 + y^2 - 10y\cos(2x)$, $\quad a = 0,\ b = \pi$.

<u>ELG:</u>

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx} f_p(x, y(x), y'(x)) - f_y(x, y(x), y'(x))$$

$$= \frac{d}{dx}\left(2y'(x)\right) - \left(2y(x) - 10\cos(2x)\right)$$

$$= 2y''(x) - 2y(x) + 10\cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad y''(x) - y(x) = -5\cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = ce^x + de^{-x} + \cos(2x) \qquad \Rightarrow y'(x) = ce^x - de^{-x} - 2\sin(2x)$$

<u>nRB:</u> $f_p(x, y(x), y'(x)) = 2y'(x)$

$$0 \stackrel{!}{=} y'(0) = c - d - 0 \qquad \& \qquad 0 \stackrel{!}{=} y'(\pi) = ce^{\pi} - de^{-\pi} - 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{\pi} & -e^{-\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{-e^{-\pi} + e^{\pi}} \begin{pmatrix} -e^{-\pi} & 1 \\ -e^{\pi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ <u>$y_0(x) = \cos(2x)$</u>

Ferner: $D^2_{(y,p)} f(x, y, p) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow f$ ist konvex in (y, p)

Die Beh. folgt mit (ii).

<u>Zusatz:</u>

Dieser Minimierer ist sogar der einzige abs Minimierer, da f <u>strikt</u> konvex.

A8 (Konvexität in 2d)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(i) Beh: f konvex $\Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}^2: t \mapsto f(t\xi)$ ist konvex

(ii) Beh: $\forall p \in \mathbb{R}: y \mapsto f(y,p)$ konvex & $\forall y \in \mathbb{R}: p \mapsto f(y,p)$ konvex $\not\Rightarrow f$ konvex.

Lösungsvorschlag:

(i) Setze $g_\xi(t) := f(t\xi)$. Seien $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$. Dann:

$$g_\xi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f((\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)\xi) = f(\lambda \cdot t_1\xi + (1-\lambda)\cdot t_2\xi)$$
$$\overset{f \text{ konvex}}{\leq} \lambda f(t_1\xi) + (1-\lambda) f(t_2\xi) = \lambda g_\xi(t_1) + (1-\lambda) g_\xi(t_2)$$

(ii) Setze $f(y,p) := y \cdot p$. Dann: $r_p(y) := f(y,p) = y \cdot p$ & $s_y(p) := f(y,p) = p \cdot y$ sind konvex (da linear), aber

$$D^2_{(y,p)} f(y,p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist indefinit } \left(\sigma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \{-1, 1\}\right),$$

d.h. f ist nicht konvex. //

A9

Betrachten Sie $L[y] = \int_0^1 y'(x)^2 + y'(x)^3 \, dx$, $M = \{y \in C^1_s([0,1], \mathbb{R}) \mid y(0) = a_0, y(1) = a_1\}$

(i) Bestimmen Sie die Lösungen $y \in C^1_s([0,1], \mathbb{R})$ von ELG + EEB.
Gibt es solche y mit $y \notin C^1([0,1], \mathbb{R})$?

(ii) Für welche a_0, a_1 können die RB zusätzlich erfüllt werden?

(iii) Zeigen Sie: $\inf_M L = -\infty$.

Lösungsvorschlag:

Schreibe $f(p) = p^2 + p^3$

(i) ELG:

$$0 \overset{!}{=} \frac{d}{dx} f_p(y'(x)) - f_y(y'(x)) = \frac{d}{dx}\left(2y'(x) + 3y'(x)^2\right) - 0$$

$\Leftrightarrow y'(x)^2 + \frac{2}{3} y'(x) - c = 0 \Leftrightarrow y'(x) = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + c} \;\; \hat{=} \text{ const}$

d.h. Lösungen der ELG sind stückweise Geraden.

EEB: potentielle Ecke in $x_i \in (0,1)$: $y(x_i) = \bar{y}$, $y'(x_i^-) = p_L$, $y'(x_i^+) = p_R$

EEB 1: $f_p(y'(x)) = 2y'(x) + 3y'(x) \overset{!}{=}$ stetig

$\Rightarrow 2p_L + 3p_L^2 = 2p_R + 3p_R^2 \Leftrightarrow -2\cdot(p_R - p_L) = 3(p_R^2 - p_L^2) = 3(p_R - p_L)(p_R + p_L)$

$\Leftrightarrow p_R = p_L$ oder $\underbrace{p_R + p_L = -\frac{2}{3}}_{(*)}$

(*) (wird in EEB 2 benutzt)

EEB 2:

$$f(y'(x)) - f_p(y'(x))\,y'(x) = (y'(x)^2 + y'(x)^3) - (2y'(x) + 3y'(x)^2)\,y'(x)$$
$$= -y'(x)^2 - 2y'(x)^3 \overset{!}{=} \text{stetig}$$

$$\Rightarrow\ -p_L^2 - 2p_L^3 = -p_R^2 - 2p_R^3 \iff p_R^2 - p_L^2 = -2(p_R^3 - p_L^3)$$
$$\iff (p_R - p_L)\cdot(p_R + p_L) = -2\cdot(p_R - p_L)\cdot(p_R^2 + p_R p_L + p_L^2)$$
$$= -2\cdot(p_R - p_L)\cdot((p_R + p_L)^2 - p_R p_L)$$

$$\overset{\circledast}{\iff} p_R = p_L \quad \underline{\text{oder}} \quad \underbrace{-\tfrac{2}{3} = -2\cdot\left(\left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 - p_R p_L\right)}$$

$\circledast$ $p_R + p_L = -\frac{2}{3}$

$$\iff p_R p_L = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$
$$\overset{\circledast}{\iff} p_R = -\frac{1}{3},\ p_L = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ Es gibt keine Ecken. Insb.: y löst ELG + EEB $\Rightarrow y \in C^1$.

(ii) Aus (i) bekannt: y' stückw. konst & $y \in C^1$.

$\Rightarrow y' \equiv \text{const} \Rightarrow y(x) = c\cdot x + d$.

RB: $y(0) \overset{!}{=} a_0$, $y(1) \overset{!}{=} a_1 \Rightarrow y(x) = \frac{a_1 - a_0}{1 - 0}\cdot(x - 0) + a_0$
$= (a_1 - a_0)\cdot x + a_1$

Insb.: Jede Wahl von RB ist möglich.

(iii) Sei $y_0(x) = (a_1 - a_0)\cdot x + a_1$ (siehe (ii)), $z \in C_s^1([0,1],\mathbb{R})$ mit $z(0) = z(1) = 0$, sei $t > 0$.

Dann: $y_0 + tz \in M$ und

$$L[y_0 + t\cdot z] = \int_0^1 (y_0'(x) + tz'(x))^2 + (y_0'(x) + tz'(x))^3\,dx$$
$$= \int_0^1 y_0'(x)^2 + 2t y_0'(x) z'(x) + t^2 z'(x)^2 + y_0'(x)^3 + 3t y_0'(x)^2 z'(x) + 3t^2 y_0'(x) z'(x)^2 + t^3 z'(x)^3\,dx$$
$$= t^3\cdot\int_0^1 z'(x)^3\,dx + t^2\cdot\int_0^1 z'(x)^2 + 3y_0'(x) z'(x)^2\,dx + t\cdot\int_0^1 2y_0'(x) z'(x) + 3y_0'(x)^2 z'(x)\,dx + \int_0^1 y_0'(x)^2 + y_0'(x)^3\,dx$$

Setze $z(x) = \begin{cases} -3x, & x \le 1/3 \\ \frac{3}{2}(x-1), & x > 1/3 \end{cases}$ (klar: $z \in C_s^1 \cap C_0$). Dann: $z'(x) = \begin{cases} -3, & x < 1/3 \\ 3/2, & x > 1/3 \end{cases}$

und $\int_0^1 z'(x)^3\,dx = (-3)^3\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\frac{2}{3} = -9 + \frac{9}{4} = -\frac{27}{4} < 0$, $\int_0^1 z'(x)^2\,dx = (-3)^2\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow L[y_0 + tz] = t^3\cdot\underbrace{\left(-\tfrac{27}{4}\right)}_{<0} + t^2\cdot(1 + 3\cdot(a_1 - a_0))\cdot\frac{9}{2} + t\cdot(2 + 3(a_1 - a_0))\cdot(a_1 - a_0)\cdot\underbrace{(z(1) - z(0))}_{=0}$$
$$+ (a_1 - a_0)^2 + (a_1 - a_0)^3$$

$$\xrightarrow{t \to \infty} -\infty$$

$$\Rightarrow \inf_M L = -\infty.$$