Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
07.11.2019

Variationsmethoden

4. Übungsblatt

Aufgabe 10 (WEF in Ecken)
Sei $y_0 \in M$ starker relativer Minimierer von

$$L\left[y\right] = \int_a^b f\left(x, y(x), y'(x)\right) \mathrm{d}x\,, \qquad M = \left\{y \in C_s^1(\left[a,b\right], \mathbb{R}) \mid y(a) = y_a,\ y(b) = y_b\right\}.$$

Zeigen Sie: Für alle $x \in (a,b)$ gilt:

$$\mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x_-), y_0'(x_+)) = \mathcal{E}(x, y_0(x), y_0'(x_+), y_0'(x_-)) = 0$$

Aufgabe 11 (Minimierer außerhalb der Klasse)
Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L\left[y\right] = \int_0^1 y'(x)^2 \left(y(x) - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x\,, \qquad M = \left\{y \in C_s^1(\left[0,1\right], \mathbb{R}) \mid y(0) = 0,\ y(1) = 1\right\}.$$

(a) Zeigen Sie: $\inf_M L \geq \frac{1}{16}$.
Hinweise: Überzeugen Sie sich, dass $\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$ für $g \in L^2(a,b)$ gilt. Spalten Sie dann das Integral an einem geeigneten Punkt x_0 auf, nutzen sie die Ungleichung und optimieren sie in x_0.

(b) Finden Sie $\widetilde{y} \in C([0,1], \mathbb{R})$ welches die Euler-Lagrange-Gleichung in $[0, x_0) \cup (x_0, 1]$ löst und die Randbedingungen erfüllt.

(c) Zeigen Sie: $\widetilde{y} \notin M$ und für $x_0 = \frac{1}{2}$ gilt $\inf_M L = \frac{1}{16} = L\left[\widetilde{y}\right]$.

(d) Zeigen Sie: L nimmt sein Infimum auf M nicht an.

Aufgabe 12 (Regularität)
Seien $q \geq 2$, $V \in C^1([a,b], \mathbb{R})$, $V > 0$. Sei $y_0 \in M$ starker relativer Minimierer von

$$L\left[y\right] = \int_a^b \frac{1}{2}|y'(x)|^2 + \frac{1}{q}V(x)|y(x)|^q\,\mathrm{d}x\,, \qquad M = \left\{y \in C_s^1(\left[a,b\right], \mathbb{R}) \mid y(a) = y_a,\ y(b) = y_b\right\}.$$

Zeigen Sie: $y_0 \in C^3([a,b], \mathbb{R})$.