Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
13.11.2019

Variationsmethoden

5. Übungsblatt

Aufgabe 13 (notwendige Jacobi-Bedingung)
Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L[y] = \int_a^b f\left(x, y(x), y'(x)\right) \mathrm{d}x\,, \qquad M = \left\{y \in C_s^1([a,b]\,, \mathbb{R}) \mid y(a) = y_a,\ y(b) = y_b\right\}.$$

(a) Sei $y(x) = y(x; \alpha, \beta)$ eine zwei-Parameter-Familie von Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung. Sei (α_0, β_0) fest und $y_0(x) = y(x; \alpha_0, \beta_0)$ regulär mit

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \alpha}(a;\alpha_0,\beta_0) & \frac{\partial y}{\partial \beta}(a;\alpha_0,\beta_0) \\ \frac{\partial y'}{\partial \alpha}(a;\alpha_0,\beta_0) & \frac{\partial y'}{\partial \beta}(a;\alpha_0,\beta_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Zeigen Sie: $c \in (a, b]$ ist konjugierter Punkt zu a bezüglich y_0 genau dann, wenn

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \alpha}(a;\alpha_0,\beta_0) & \frac{\partial y}{\partial \beta}(a;\alpha_0,\beta_0) \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha}(c;\alpha_0,\beta_0) & \frac{\partial y}{\partial \beta}(c;\alpha_0,\beta_0) \end{pmatrix} = 0$$

(b) Sei $f(x, y, p) = -y\sqrt{1-p^2}$. Prüfen Sie die notwendige Jacobi-Bedingung für die positive Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung mit $y(0) = \sqrt{2}$, $y(\pi) = \sqrt{2}$.

Aufgabe 14 (notwendige Jacobi-Bedingung)
Sei $\lambda \notin \{k^2\pi^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$, $c \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L[y] = \int_0^1 y'(x)^2 - \lambda y(x)^2 + 2c\,y(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad M = \left\{y \in C_s^1([0,1]\,, \mathbb{R}) \mid y(0) = 0,\ y(1) = 0\right\}.$$

(a) Zeigen Sie: Es existiert genau ein $y \in M$, welches die Euler-Lagrange-Gleichung löst.

(b) Zeigen Sie: Die notwendige Jacobi-Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn $\lambda < \pi^2$.