Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
20.11.2019

Variationsmethoden

6. Übungsblatt

Aufgabe 15 (Prüfen aller notwendigen Bedingungen)
Sei $n \geq 3$ ungerade. Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L\,[y] = \int_0^1 y'(x)^n \,\mathrm{d}x\,, \qquad M = \left\{ y \in C_s^1([0,1]\,,\mathbb{R}) \mid y(0) = 0,\ y(1) = 1 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie: L besitzt auf M keine starken relativen Minimierer.
Hinweis: notwendige Weierstraß-Bedingung.

(b) Zeigen Sie: Falls $y \in C_s^1([0,1],\mathbb{R})$ die Euler-Lagrange-Gleichung löst und Erdmannschen-Ecken-Bedingungen erfüllt, dann ist y linear.

(c) Sei $y_0 \in M$ Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, welche die Erdmannschen-Ecken-Bedingungen erfüllt. Prüfen Sie die notwendige Legendre- und Jacobi-Bedingung.

(d) Ist y_0 ein schwacher relativer Minimierer? Falls ja: Ist y_0 globaler Minimierer?

Aufgabe 16
Untersuchen Sie das Variationsproblem

$$L\,[y] = \int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad M = \left\{ y \in C_s^1([1,2]\,,\mathbb{R}) \mid y(1) = -2,\ y(2) = -1 \right\}.$$

auf schwache relative, starke relative und absolute Minimierer.

Aufgabe 17 (Hinreichende Weierstraß-Bedingung) *Korrektur:* $\frac{y(x)^2}{x^2} \to \frac{y(x)^2}{4x^2}$
Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L\,[y] = \int_1^4 y'(x)^2 - \frac{y(x)^2}{4x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad M = \left\{ y \in C_s^1([1,4]\,,\mathbb{R}) \mid y(1) = 1,\ y(4) = 6 \right\}.$$

(a) Finden Sie alle Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung, welche die Erdmannschen-Ecken-Bedingungen erfüllen.
Hinweis: Nutzen sie die Ansätze $y_1(x) = x^\alpha$ und $y_2(x) = z(x)\,y_1(x)$.

(b) Sei $y_0 \in M$ Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, welche die Erdmannschen-Ecken-Bedingungen erfüllt. Betten Sie y_0 geeignet in ein Extremalenfeld ein und zeigen Sie: y_0 ist starker relativer Minimierer.