Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
27.11.2019

Variationsmethoden

7. Übungsblatt

Aufgabe 18 (Potentielle Minimierer aus alten Aufgaben)

(a) **Zu A5:** Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L[y] = \int_0^3 y'(x)^2 \cdot (1 - y'(x))^2 \, \mathrm{d}x\,, \quad M = \left\{ y \in C_s^1([0,3]\,,\mathbb{R}) \mid y(0) = 0,\ y(3) = 1 \right\}.$$

Bekannt: $y_0(x) = \frac{1}{3}x$ ist die einzige C^1-Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist, welche zudem die Randbedingungen erfüllt. Weiter gilt $\inf_M L = 0$.
Untersuchen Sie, ob y_0 schwacher relativer, starker relativer, absoluter Minimierer oder keines der Genannten ist.

(b) **Zu A9:** Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L[y] = \int_0^1 y'(x)^2 + y'(x)^3 \, \mathrm{d}x\,, \quad M = \left\{ y \in C_s^1([0,1]\,,\mathbb{R}) \mid y(0) = a_0,\ y(1) = a_1 \right\}.$$

Bekannt: $y_0(x) = (a_1 - a_0)x + a_0$ ist die einzige Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist, welche zudem die Erdmannschen-Ecken-Bedingungen und Randbedingungen erfüllt. Weiter gilt $\inf_M L = -\infty$.
Untersuchen Sie, ob y_0 schwacher relativer, starker relativer, absoluter Minimierer oder keines der Genannten ist.
Hinweis: Unterscheiden sie die Fälle $a_0 - a_1 < \frac{1}{3}$, $a_0 - a_1 = \frac{1}{3}$ und $a_0 - a_1 > \frac{1}{3}$.

(c) **Zu A14:** Sei $\lambda < \pi^2$. Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L[y] = \int_0^1 y'(x)^2 - \lambda\, y(x)^2 + 2c\, y(x) \, \mathrm{d}x\,, \quad M = \left\{ y \in C_s^1([0,1]\,,\mathbb{R}) \mid y(0) = 0 = y(1) \right\}.$$

Bekannt:

$$y_0(x) = \begin{cases} \frac{c}{\lambda}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) - \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}\right)}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\lambda}\right)\right)\right) & ,\lambda > 0 \\ \frac{c}{2}x(1-x) & ,\lambda = 0 \\ \frac{c}{\lambda}\left(1 - \cosh\left(\sqrt{-\lambda}x\right) - \frac{\sinh\left(\sqrt{-\lambda}x\right)}{\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\right)}\left(1 - \cosh\left(\sqrt{-\lambda}\right)\right)\right) & ,\lambda < 0 \end{cases}$$

ist die einzige Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, welche zudem die Erdmannschen-Ecken-Bedingungen und Randbedingungen erfüllt.
Untersuchen Sie, ob y_0 schwacher relativer, starker relativer, absoluter Minimierer oder keines der Genannten ist.

Aufgabe 19 (Brachistochrone unter den monotonen Funktionen)
Korrektur: "y streng monoton fallend" geändert zu "$\max y' < 0$" in Definition $\widetilde{M}$.
Seien $\alpha > y_a > y_b$. Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L\,[y] = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{\alpha - y(x)}}\,\mathrm{d}x\,, \quad \widetilde{M} = \left\{y \in C^1_s([a,b]\,,\mathbb{R}) \mid y(a) = y_a,\ y(b) = y_b,\ \max y' < 0\right\}.$$

Sei $y_0 \in \widetilde{M} \cap C^2([a,b],\mathbb{R})$ Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung. Zeigen Sie: y_0 ist absoluter Minimierer von L auf $\widetilde{M}$.
Hinweis: Finden Sie ein Funktional $\widetilde{L}$, so dass $L[y] = \widetilde{L}[y^{-1}]$, wobei y^{-1} die Umkehrfunktion von y ist. Untersuchen Sie $\widetilde{L}$ auf Minimierer. Eine explizite Bestimmung von y_0 ist nicht verlangt.