Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler

WS 2019/20
05.12.2019

Variationsmethoden

8. Übungsblatt

Aufgabe 20 (Isoperimetrisches Problem)
Sei $l > 0$. Betrachten Sie das Variationsproblem

$$L[y] = \int_0^l -y(s)\sqrt{1-y'(s)^2}\,\mathrm{d}s\,,$$
$$M = \left\{y \in C_s^1([0,l],\mathbb{R}) \mid y(0) = 0 = y(l),\ \min y \geq 0\ \max|y'| \leq 1\right\}.$$

Bekannt: $y_0(s) = \frac{l}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{l}s\right)$ ist die einzige C_s^1-Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung, welche zudem die Erdmannschen-Ecken-Bedingungen und Randbedingungen erfüllt.
Zeigen Sie mithilfe der hinreichenden Weierstraß-Bedingung: y_0 ist starker relativer Minimierer.
Hinweis: Suchen Sie zur Konstruktion des Extremalenfeldes $y = y(s,\alpha)$ Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung, so dass $y(-\alpha,\alpha) = y(l+\alpha,\alpha) = 0$.

Aufgabe 21 (*Korrektur:* neue Aufgabenstellung (*a*).)
Betrachten Sie das Funktional

$$L[y] = \int_a^b (x + y'(x))^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Weiter seien

$$N = C_s^1([a,b],\mathbb{R}), \qquad M = \left\{y \in C_s^1([a,b],\mathbb{R}) \mid y(a) = y_a,\ y(b) = y_b\right\}.$$

(a) Zeigen Sie: L hat auf N unendlich viele absolute Minimierer. Bestimmen Sie diese.
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 7 auf Blatt 3.

(b) Zeigen Sie mit den Methoden aus Kapitel 6 (konvexe Integranden): L nimmt sein Minimum auf M an.

(c) Zeigen Sie durch Konstruktion eines geeigneten Extremalenfeldes: L nimmt sein Minimum auf M an.

Aufgabe 22 (Kürzeste Verbindung auf dem Zylinder)
Sei Z ein Zylinder mit Radius $r > 0$ und unendlicher Höhe. Bestimmen Sie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf Z mithilfe eines Variationsproblems.